Foglio di esercizi 5 - 18 Aprile 2019
Probabilità e statistica – Ingegneria Meccanica
Alessandro Ciallella

Esercizio 1. Nove cacciatori sparano allo stesso istante un colpo a testa al passaggio di uno stormo di anatre in volo. Ognuno mira ad un bersaglio a caso, indipendentemente dagli altri, e colpisce il suo bersaglio con probabilità $p = 2/3$. Calcolare il valore atteso di X, dove X conta il numero di anatre che non sono colpite al passaggio di uno stormo di 15 anatre.
(Suggerimento. Non provare a calcolare la densità di X, ma scrivere $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{15}$, dove X_i è una v.a. di Bernoulli che vale 1 se la i–esima anatra non è colpita, ed utilizzare la linearità del valore atteso.)

Esercizio 2. (cfr. Es.2 scheda 4)
Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{y}+y)}, & x > 0\,,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare il valore atteso di X.
(N.B. Non si riesce a calcolare la marginale della X, utilizzare il condizionamento ad $Y = y$).

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & (x,y) \in A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo A il triangolo di vertici $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$. Determinare la costante c e la densità marginale di X e la funzione di ripartizione di Y . Calcolare $Cov(X, Y)$ e la probabilità p che Y sia minore di X supposto che $Y \leq 1$.

Esercizio 4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

p(x, y)	Y = 0	Y = 1	Y = 2	Y = 3
X = 0	1/32	3/32	3/32	1/32
X = 1	1/16	1/8	1/16	0
X = 2	1/8	1/8	0	0
X = 3	1/4	0	0	0

Calcolare il valor medio della variabile X ed il valor medio della variabile X supposto che $Y = 1$. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

Esercizio 5. Si consideri una particella che si muove nella striscia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ la cui posizione (X, Y) a un tempo fissato è un vettore aleatorio con densità $f(x, y) = x^{-2}$ per $(x, y) \in S$ e 0 altrove. Si determinino le densità marginali per X e Y e si stabilisca se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Si calcoli la probabilità p che la particella si trovi nel quadrato avente vertici $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Si calcoli il valore atteso di X e di $Z = \sqrt{X}Y$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & se\ 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & se\ 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & se\ x \geq 10 \end{cases}$$

Quali sono i possibili valori di X? Qual è la densità $f_X(x)$ di X? Quanto vale $\mathbb{E}(X)$?

Esercizio 7. Due v. a. X e Y sono indipendenti e uniformi su $[0, 1]$. Calcolare

$$P(XY > 1/2); \qquad P(XY < 1/4|X > 1/2); \qquad P(XY > 1/4|X/Y > 2).$$

(Individuare le regioni nel quadrato $[0, 1]^2$ che verificano le disuguaglianze, il calcolo si può ridurre al calcolo di aree).

Esercizio 8. Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \leq n$ poniamo $X_k = 1$ se il k–esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci. Usando la disuguaglianza di Chebishev, trovare una minorazione per $P(|\overline{X_n} - \frac{1}{2}| \leq 0.1)$, per $n = 900$.

Esercizio 9. Un'urna contiene 112 dadi di cui 56 sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che la probabilità di ottenere 1 sia $1/2$, mentre quella di ottenere gli altri cinque valori sia $1/10$. Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indichiamo con X il risultato del lancio.
a) Quanto vale $P(X = 3)$?; quanto vale $\mathbb{E}(X)$?
b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Indichiamo con X il risultato

del primo lancio e con Y il risultato del secondo. Qual è la probabilità di ottenere $X = 2$ e $Y = 3$? Sapendo che i lanci hanno dato 2 e 3, qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati? X ed Y sono v.a. indipendenti?

Esercizio 10. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

p(x, y)	Y = -2	Y = -1	Y = 0	Y = 1	Y= 2
X = -2	0	0.1	0	0	c
X = -1	0.1	0.1	c	0	0
X = 0	0	c	0	0.125	0
X = 1	0	0	0.125	c	c
X = 2	c	0	0	c	0.1

1. Determinare il valore di c.
2. Calcolare $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $Var(X)$.
3. Calcolare $\mathbb{E}(XY)$ e $Cov(X, Y)$.
4. Calcolare $Cov(2X - 1, -Y)$.