Esercizi 2: Curve dello spazio
Soluzioni

0.1 Esercizio

Si consideri la curva (elica circolare):

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

dove $a > 0$.

a) Calcolare curvatura e torsione di α nel generico punto t.

b) Determinare la funzione ascissa curvilinea $s = s(t)$ con origine in $t = 0$; determinare quindi la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. Si ha:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} a\sin t \\ -a\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = a\sqrt{a^2+b^2},$$

da cui

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Poiché

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = a^2 b$$

Otteniamo

$$\tau(t) = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

In conclusione curvatura e torsione sono

$$k(t) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(t) = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

entrambe costanti.

0.2 Esercizio

a) Verificare che la curva

$$\begin{cases} x = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ y = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ z = a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{cases}$$

è piana, per ogni scelta di a_i, b_i, c_i.
b) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la curva

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t^2 \\ z = t + t^2 \end{cases}$$

Soluzione. a) *Basta osservare che $\alpha'''(t)$ è identicamente nulla, dunque la torsione è identicamente nulla e la curva è piana.*

b) *Dobbiamo studiare l'equazione in a, b, c:*

$$a(1 + t) + b(1 + t^2) + c(t + t^2) + d = 0$$

che deve risultare valida per ogni t. La riscriviamo:

$$(a + b + d) + (a + c)t + (b + c)t^2 = 0$$

e otteniamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

che ammette ∞^1 soluzioni, tutte proporzionali a

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -1,\ d = -2.$$

Dunque il piano cercato è

$$x + y - z - 2 = 0.$$

0.3 Esercizio

Studiare la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

dove $\phi(t)$ è una funzione positiva di t.

a) Calcolare la curvatura $k(t)$ in funzione di $\phi(t)$, e determinare $\lim_{t\to\infty} k(t)$ nel caso in cui $\phi(t) = t^2$.

b) Trovare una funzione $\phi(t)$ per la quale α risulti piana.

c) Scrivere un'equazione differenziale che deve essere soddisfatta da $\phi(t)$ affinche' α sia una curva piana.

Soluzione. a) *Abbiamo:*

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \phi' \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ \phi'' \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ \phi''' \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} \phi' \sin t + \phi'' \cos t \\ \phi'' \sin t - \phi' \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \sqrt{1 + \phi'^2 + \phi''^2}$$

Poiché

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \phi'^2}$$

si ha:

$$k(t)^2 = \frac{1 + \phi'^2 + \phi''^2}{(1 + \phi'^2)^3} = \frac{1}{(1 + \phi'^2)^2} + \frac{\phi''^2}{(1 + \phi'^2)^3}.$$

Se $\phi(t) = t^2$ *allora* $\phi' = 2t, \phi'' = 2$ *e:*

$$k(t)^2 = \frac{5 + 4t^2}{(1 + 4t^2)^3}$$

che evidentemente tende a zero quando $t \to \infty$.

b) $\phi(t) = \cos t$ *e in tal caso* α *è contenuta nel piano* $x - z = 0$.

c) *La curva è piana se e solo se* $\tau(t) \equiv 0$ *quindi se e solo se*

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = 0$$

per ogni t. *Un calcolo mostra che*

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \phi'(t) + \phi'''(t),$$

dunque l'equazione differenziale cercata è

$$\phi'(t) + \phi'''(t) = 0.$$

La soluzione generale è

$$\phi(t) = a \cos t + b \sin t + c$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$; *in tal caso la curva è contenuta nel piano* $z = ax + by + c$.

0.4 Esercizio

Data una funzione differenziabile $\psi(t)$ definita per $t > 0$, si consideri la curva:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \psi(t)\cos t \\ \psi(t)\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Dimostrare che, se $\psi(t)$ converge a zero, per $t \to \infty$, insieme alle sue derivate $\psi'(t), \psi''(t)$, allora si ha

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0.$$

Soluzione. Si ha:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \psi' \cos t - \psi \sin t \\ \psi' \sin t + \psi \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} \psi'' \cos t - 2\psi' \sin t - \psi \cos t \\ \psi'' \sin t + 2\psi' \cos t - \psi \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se $\psi(t), \psi'(t)$ e $\psi''(t)$ convergono a zero per $t \to \infty$, allora $|\alpha''(t)|$ tende a zero ma $|\alpha'(t)| \geq 1$. Questo implica (verificare) che $k(t)$ tende a zero.

0.5 Esercizio

Si consideri la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ \log t \end{pmatrix} \quad t \geq 1.$$

Determinare:

a) La funzione ascissa curvilinea $s(t)$, con origine in $t = 1$.

b) La curvatura e la torsione di α. Calcolare inoltre

$$\lim_{t\to\infty} k(t), \quad \lim_{t\to\infty} \tau(t).$$

c) È vero che il piano osculatore π_t tende a un piano limite quando $t \to \infty$?

d) È vero che la terna di Frenet $(T(t), N(t), B(t))$ tende a una terna limite quando $t \to \infty$?

Soluzione. a) *Si ha:*

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{t^3} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$|\alpha'(t)|^2 = 4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2} = \Big(\frac{2t^2 + 1}{t}\Big)^2$$

ovvero

$$|\alpha'(t)| = 2t + \frac{1}{t}.$$

Abbiamo:

$$s(t) = \int_1^t (2u + \frac{1}{u})\, du = t^2 + \log t - 1.$$

b) *Si ha:*

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{t} \\ \frac{2}{t^2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

e un calcolo mostra che

$$|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \frac{4t^2 + 2}{t^2}.$$

Ne segue che

$$k(t) = \frac{2t}{(2t^2 + 1)^2}.$$

e dunque $k(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$. *Ora la torsione. Si ha:*

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \frac{8}{t^3},$$

e otteniamo

$$\tau(t) = \frac{8}{t(4t^2 + 2)^2}$$

ed evidentemente $\tau(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

c) *Poiche' $B(t)$ è il versore del vettore $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$, si vede che*

$$\lim_{t\to\infty} B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo, si dimostra

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t\to\infty} N(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\lim_{t\to\infty} (T(t), N(t), B(t)) = \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big).$$

0.6 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ \sqrt{1-e^{-2t}} \end{pmatrix} \qquad t \in [1, +\infty).$$

a) Verificare che α è regolare, e che la sua traccia è contenuta in una sfera.

b) È vero che esiste una costante c tale che $|\alpha'(t)| \leq ce^{-t}$ per ogni $t \geq 1$? È vero che l'arco da 1 a $+\infty$ ha lunghezza totale costante ?

0.7 Esercizio

Si consideri la curva (cubica gobba):

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \ t \geq 0.$$

Dopo aver osservato che α è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare la funzione ascissa curvilinea $s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ e calcolare la lunghezza della curva da $t = 0$ a $t = 2$. Determinare inoltre:

b) curvatura e torsione nel punto $\alpha(t)$;

c) il triedro di Frenet nell'origine;

d) l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(2)$;

e) l'equazione del piano osculatore e del piano normale nel punto $\alpha(0)$.

0.8 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2-t^2 \\ 1+t \\ 4+2t-t^2 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver osservato che α è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(0)$.

b) Determinare curvatura e torsione della curva nel punto generico $\alpha(t)$.

c) Determinare il triedro di Frenet per il valore $t = 1$ e l'equazione di ciascuno dei piani: osculatore, normale rettificante.

d) È vero che α è piana ? In tal caso, determinare l'equazione del piano che la contiene.

0.9 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1-e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

a) Determinare la curvatura $k(t)$ e la torsione $\tau(t)$ di α al variare di $t \in [0, \infty)$.

b) Stabilire se esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to +\infty} k(t), \quad \lim_{t \to +\infty} \tau(t).$$

c) Sia π_t il piano osculatore di α nel punto $\alpha(t)$. È vero che π_t tende a un piano limite quando $t \to \infty$? È vero che la terna di Frenet $(T(t), N(t), B(t))$ converge a una terna specifica ?

Soluzione. Si ha:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ e^{-t} \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -e^{-t} \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ e^{-t} \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + e^{-2t}}.$$

Si ha poi:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ 1 \\ e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \sqrt{1 + 2e^{-2t}}.$$

Otteniamo

$$k(t) = \sqrt{\frac{1 + 2e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^3}}.$$

Si vede che $\lim_{t \to \infty} k(t) = 1$*. Ora la torsione. Si ha:*

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = -2e^{-t}.$$

Dunque

$$\tau(t) = \frac{2e^{-t}}{1 + 2e^{-2t}}$$

e $\tau(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$*.*

c) *È evidente che il versore binormale* $B(t)$ *converge al versore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, quindi il piano osculatore converge al piano* $y = 1$*. La terna di Frenet non converge a nessuna terna specifica.*

0.10 Esercizio

Sia $\alpha : [-L, L] \to \mathbf{R}$ una curva biregolare dello spazio, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s.

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor, fino al terzo ordine, della funzione vettoriale $\alpha(s)$ nell'intorno di $s = 0$, esprimendo i coefficienti in funzione del riferimento di Frenet in $s = 0$ (vale a dire, in funzione della terna ortonormale $(T(0), N(0), B(0))$; usare le formule di Frenet).

b) Determinare lo sviluppo di Taylor intorno a $s = 0$, fino al terzo ordine, di ciascuna delle seguenti funzioni scalari:

$$\psi_1(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), T(0) \rangle, \;\; \psi_2(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), N(0) \rangle, \;\; \psi_3(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(0) \rangle.$$

0.11 Esercizio

Dato $\lambda > 0$, l'applicazione lineare $F_\lambda : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

di matrice canonica $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è detta *omotetia* di fattore λ. Data una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$, si consideri la curva

$$\beta(t) = F_\lambda(\alpha(t))$$

ottenuta componendo α con l'omotetia F_λ.

a) Determinare $\beta(t)$ se α è l'elica:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

b) Se α è una curva qualunque, calcolare $k_\beta(t)$ e $\tau_\beta(t)$ in funzione di $k_\alpha(t)$ e $\tau_\alpha(t)$.

c) È vero che la proprietà di essere una curva piana è invariante per omotetie ?

Soluzione. b) *Possiamo scrivere $F_\lambda(x) = \lambda x$, dunque:*

$$\beta(t) = \lambda \alpha(t).$$

Otteniamo con facili calcoli

$$k_\beta(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot k_\alpha(t), \quad \tau_\beta(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \tau_\alpha(t).$$

Poiche' $\tau_\beta(t) = 0$ se e solo se $\tau_\alpha(t) = 0$ la proprietá di essere una curva piana è invariante per omotetie.

0.12 Esercizio

Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e stabilire i valori massimi e minimi che puo' assumere la sua curvatura.

0.13 Esercizio

Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

0.14 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, sia f un'isometria di $\mathbf{R}^3$ e sia β l'immagine di α tramite f, cioè $\beta = f \circ \alpha$.

a) Dimostrare che $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$ per ogni s.

b) Dimostrare che

$$\tau_\beta(s) = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è diretta,} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è inversa.} \end{cases}$$

Si assuma noto il seguente fatto. Se A è una matrice ortogonale di ordine 3 e $u, v \in \mathbf{R}^3$, allora:

$$Au \wedge Av = \begin{cases} A(u \wedge v) & \text{se } \det A = 1, \\ -A(u \wedge v) & \text{se } \det A = -1. \end{cases}$$

0.15 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio parametrizzata dall'ascissa curvilinea: $\alpha = \alpha(s)$, e sia $B(s)$ il versore binormale di α. Fissato un parametro $\lambda > 0$, si consideri la curva $\alpha_\lambda : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\alpha_\lambda(s) = \alpha(s) + \lambda B(s) \quad \text{per ogni } s \in [0, L].$$

a) Discutere la regolarità di α_λ, e dimostrare che la lunghezza di α_λ sull'intervallo $[0, L]$ risulta maggiore o uguale della lunghezza di α su $[0, L]$ per ogni scelta di λ. Dare inoltre una condizione geometrica necessaria e sufficiente affinche' si abbia l'uguaglianza tra le due lunghezze.

b) Supponiamo ora che α abbia curvatura e torsione costanti, diciamo $k(s) = p$, $\tau(s) = q$ per opportuni numeri reali p, q, e per ogni $s \in [0, L]$. Calcolare la lunghezza di α_λ e stabilire se α_λ ha anch'essa curvatura costante oppure no.

c) Supponiamo che α sia una curva piana. È vero che α_λ si ottiene applicando ad α un'opportuna isometria dello spazio ? Se è cosi', quale ?

d) Calcolare la lunghezza di α_λ se $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ è cosi' definita:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ s \end{pmatrix}.$$

Soluzione. a) $\alpha'_\lambda(s) = \alpha'(s) + \lambda B'(s)$ *e per le formule di Frenet otteniamo*

$$\alpha'_\lambda(s) = T(s) + \lambda\tau(s)N(s),$$

dunque

$$|\alpha'_\lambda(s)| = \sqrt{1 + \lambda^2\tau(s)^2}$$

che è sempre positivo. Dunque α_λ *è regolare per ogni* λ*; inoltre* $|\alpha'_\lambda(s)| \geq 1 = |\alpha'(s)|$, *e vale l'uguaglianza se e solo se* $\tau(s) = 0$. *Cio' implica*

$$L(\alpha_\lambda) = \int_0^L \sqrt{1 + \lambda^2\tau(s)^2}\, ds \geq \int_0^L ds = L = L(\alpha)$$

per ogni λ, *e vale l'uguaglianza se e solo se* $\tau(s) = 0$ *per ogni* s, *quindi se e solo se* α *è piana.*

b) *Se* $\tau(s) = q$ *abbiamo*

$$L(\alpha_\lambda) = \int_0^L \sqrt{1 + \lambda^2 q^2}\, ds = L\sqrt{1 + \lambda^2 q^2}.$$

Si ha, usando le formule di Frenet: $T' = pN, N' = -pT - qB, B' = qN$, *dunque*

$$\alpha''_\lambda(s) = (-\lambda pq)T(s) + pN(s) - \lambda q^2 B(s);$$

poiche' le coordinate, rispetto alla terna di Frenet, di α'_λ *e* α''_λ *(e, come si vede facilmete, di tutte le derivate di* α*) sono funzioni costanti di* s, *saranno costanti anche curvatura e torsione di* α_λ.

c) *Se* α *è piana, il versore binormale è un vettore costante; dunque* α_λ *si ottiene da* α *per traslazione lungo il vettore* λB, *che è effettivamente un'isometria dello spazio.*

d) *La curva in questione è un'elica, con torsione costante* $q = -\sqrt{2}/4$. *Dunque la lunghezza di* α_λ *è*

$$L(\alpha_\lambda) = L\sqrt{1 + \frac{2\lambda^2}{16}}$$