Parte 1: Curve piane

A. Savo

1 Curve

Generalmente, per *curva* si intende:

• *Un insieme di livello di una funzione di due variabili*

(ad esempio, se la funzione è $f(x, y) = x^2 + y^2$, allora

$$f^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1) ovvero

• *La traiettoria percorsa da un punto mobile sul piano, descritta da equazioni parametriche*

(ad esempio, la circonferenza di cui sopra è la traiettoria descritta da un punto mobile, che si muove nel piano con equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

al variare del tempo t).

Nello studio delle curve adotteremo il secondo punto di vista, ma nonostante cio' avremo in mente, principalmente, la geometria della traiettoria percorsa dal punto; in particolare, definiremo la *lunghezza* e la *curvatura* di una curva nel piano o nello spazio.

• Nel seguito, il termine *differenziabile* indica *differenziabile di classe* C^∞, a meno che non sia diversamente indicato.

Definizione. *Una curva differenziabile è un' applicazione* $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ *di classe* C^∞ *definita su un intervallo* I *di* $\mathbf{R}$. *Quindi*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

dove $x(t), y(t)$ *sono funzioni differenziabili di* $t \in I$. *Il vettore*

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

è detto vettore velocità *(o vettore tangente) della curva in* $t \in \mathbf{R}$. *L'insieme di punti*

$$\{\alpha(t) : t \in I\}$$

è detto traccia *della curva* α.

Spesso chiameremo $\alpha(t)$, nell'intervallo specificato, *arco di curva*. L'intervallo I potrebbe essere anche illimitato, ad esempio $I = [a, \infty)$, o addirittura tutto $\mathbf{R}$. Spesso scriveremo anche

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Definizione. *Un arco di curva* $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ *è detto* regolare *se* $\alpha'(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in I$.

Le curve regolari hanno dunque vettore tangente in ogni loro punto, e hanno traccia "liscia"; sono le curve che studieremo principalmente nel corso.

1.1 Esempi

Rette. La curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

parametrizza il segmento di retta che unisce $(1, -2)$ e $(7, 1)$; la sua traccia giace dunque sulla retta di equazione $x - 2y - 5 = 0$.

In generale, se le componenti sono equazioni lineari di t:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in I$$

dove $x_0, y_0, l, m \in \mathbf{R}$, allora il vettore velocità è costante: $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$; se l ed m non sono entrambi nulli la traccia sarà sempre una retta, e la curva è ovviamente regolare.

Circonferenze. La curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ha come traccia la circonferenza di centro l'origine e raggio R, di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = R^2$. Il vettore velocità ha norma costante, uguale a $R > 0$, dunque la curva è regolare.

Curva non regolare. La curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

ha vettore velocità $\alpha'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, dunque non è regolare (in $t = 0$). Quindi ogni arco di curva

$$\beta : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

tale che $0 \notin [a, b]$, è regolare.

In effetti, la traccia di α ha equazione cartesiana $x^2 - y^3 = 0$, che ha una singolarità (cuspide) nell'origine: in tale punto, non è possibile tracciare la retta tangente.

• Una curva può avere autointersezioni: $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (autointersezione in $t = 2, -2$).

1.2 Curve di livello di funzioni differenziabili

Data la funzione $f(x, y)$, e dato $c \in \mathbf{R}$, l'insieme

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

è detto *insieme di livello* di f. *Parametrizzare un insieme di livello* $f^{-1}(c)$ (o un sottoinsieme Γ di esso) significa trovare (se possibile) una curva α la cui traccia coincide con Γ. In tal caso $f^{-1}(c)$ sarà detto *curva di livello* di f.

Esempio. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $c > 0$, allora l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = c$; esso è una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$, che si parametrizza, ad esempio:

$$\begin{cases} x = \sqrt{c} \cos t \\ y = \sqrt{c} \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ha interesse trovare, se possibile, una parametrizzazione *regolare* di una dato insieme di livello, e daremo ora una condizione sufficiente affinché ciò accada.

• Per iniziare, supponiamo che l'insieme di livello sia il *il grafico di una funzione differenziabile* $g(x)$ su un dato intervallo $[a, b]$, sia cioè l'insieme:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = g(x), x \in [a, b]\}.$$

Notiamo che $\Gamma = f^{-1}(0)$ dove $f(x, y) = y - g(x)$. Osserviamo che Γ ammette questa parametrizzazione:

$$\alpha : \begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

dunque il vettore velocità

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

non è mai nullo, e di conseguenza la parametrizzazione è regolare. Tutto quello che abbiamo detto si estende (con ovvi cambiamenti) al caso in cui l'insieme di livello sia il grafico di una funzione della variabile y. In conclusione:

Teorema 1. *Il grafico di una funzione differenziabile di una variabile si può sempre parametrizzare in modo regolare.*

Esempio. Il grafico di $y = x^2 + 1$ (che è una parabola), ammette la parametrizzazione regolare

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Veniamo ora al risultato generale. Data una funzione $f(x, y)$ che sia C^1 su un dominio di $\mathbf{R}^2$ (eventualmente, su tutto il piano), ricordiamo che il *gradiente* di f in (x, y) è il vettore:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

avente come componenti le derivate parziali della funzione f. Un punto P è detto *critico* se il gradiente in tal punto è il vettore nullo, *regolare* se non è critico. Un numero reale c si dice *valore regolare* di f se $f^{-1}(c)$ non contiene punti critici di f.
Vale il seguente risultato.

Teorema 2. *Sia $f(x, y)$ una funzione C^1 e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un suo punto regolare. Supponiamo che $f(x_0, y_0) = c$. Allora, in un intorno di P_0, l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ può essere parametrizzato in modo regolare, ed è la traccia di un arco di curva regolare*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}^2$$

per qualche $\epsilon > 0$. Si ha inoltre che il vettore $\nabla f(\alpha(t))$, gradiente di f nel punto $\alpha(t)$, è sempre ortogonale alla curva di livello, nel senso che

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Detto in breve, l'insieme di livello è "liscio" in un intorno di un qualunque punto regolare, e il gradiente è sempre ortogonale alla curva di livello.

Dimostrazione. Già sappiamo che la conclusione è vera se $f(x, y)$ è del tipo

$$f(x, y) = y - g(x)$$

dove $g(x)$ è una funzione differenziabile di x. Infatti, in tal caso, l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ coincide con il grafico della funzione $y = g(x) + c$, che si parametrizza, come abbiamo visto, in questo modo:

$$\alpha(t) = (t, g(t) + c).$$

Dunque

$$\alpha'(t) = (1, g'(t))$$

che risulta essere sempre diverso dal vettore nullo. Dunque $\alpha(t)$ è regolare. Analoghe considerazioni si possono fare se $f(x, y)$ è del tipo $f(x, y) = x - h(y)$.

Ora, per un noto teorema di Analisi (detto *teorema della funzione implicita*) in un intorno di un punto regolare possiamo sempre esprimere l'insieme di livello come grafico di una funzione di una sola variabile (precisamente, come grafico di una funzione di x, se $f_y(P_0) \neq 0$, e come grafico di una funzione della variabile y se $f_x(P_0) \neq 0$). Questo dimostra la prima parte del teorema. Sia ora

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [-\epsilon, \epsilon].$$

una parametrizzazione regolare di $f^{-1}(c)$ vicino a un dato punto regolare P_0. Allora si ha

$$f(x(t), y(t)) = c$$

per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sia

$$\psi(t) = f(x(t), y(t))$$

allora necessariamente $\psi'(t) = 0$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Ma per la legge di derivazione delle funzioni composte:

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$$

da cui l'asserto. □

Retta tangente. Se $p_0 = (x_0, y_0)$ è un punto regolare dell'insieme di livello $\Gamma = f^{-1}(c)$, allora esiste la retta tangente a Γ in p_0: qual'è la sua equazione ? Sapendo che il vettore gradiente nel punto p_0 è ortogonale a tale retta, otteniamo subito l'equazione:

$$f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) = 0.$$

Ellissi. Parametrizzare, in modo regolare, l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinare il vettore velocità; calcolare i punti dove la norma del vettore velocità è massima (resp. minima).

Esempio. Studiare le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. Il gradiente è dato da

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

L'unico punto critico è l'origine, e l'unico valore critico è $c = 0$. Le curve di livello $f(x, y) = c$ con $c \neq 0$ si possono dunque parametrizzare in modo regolare; tali curve sono iperboli generali. Se $c = 0$ l'insieme di livello è una coppia di rette incidenti; tale insieme è singolare nell'origine.

- Discutere gli insiemi di livello di $f(x,y) = x^2 - y^2 - 6x + 4y$.
- Discutere gli insiemi di livello di $f(x,y) = x^2 - y^3$. Poiché

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix},$$

l'unico punto critico è l'origine: siccome $f(0,0) = 0$, l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ si può parametrizzare in modo regolare per ogni $c \neq 0$; in corrispondenza del valore critico $c = 0$ otteniamo l'insieme di livello $f^{-1}(0)$ avente equazione:

$$x^2 - y^3 = 0,$$

che ha una cuspide in corrispondenza del punto critico, e dunque non ha vettore tangente in quel punto. Per ogni punto P di $f^{-1}(0)$ diverso dall'origine avremo una parametrizzazione regolare di $f^{-1}(0)$ in un intorno sufficientemente piccolo di P. Notiamo infine che $f^{-1}(0)$ si identifica con il grafico della funzione

$$\phi(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

che in effetti è derivabile per tutti i valori di x meno che $x = 0$.

2 Lunghezza, ascissa curvilinea

Vogliamo ora definire la lunghezza di un arco di curva $\alpha([a,b])$. Fissiamo una *partizione* $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ (cioè un insieme di punti che dividono $[a,b]$ in sottointervalli):

$$\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

e denotiamo con

$$|\mathcal{P}| = \max_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}|$$

l'*ampiezza* della partizione. La lunghezza della poligonale individuata da P è data da

$$L_a^b(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

L'intuizione suggerisce che la lunghezza dell'arco di curva è adeguatamente approssimata dalla lunghezza di una poligonale P quando la sua ampiezza $|\mathcal{P}|$ tende a zero. A sua volta, la definizione di integrale e il teorema del valore medio mostrano che, quando $|\mathcal{P}|$ è piccola, allora la lunghezza della poligonale è bene approssimata dall'integrale $\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$.

$$|\mathcal{P}| \to 0 \quad \text{implica} \quad L_a^b(\alpha, \mathcal{P}) \to L_a^b(\alpha) \doteq \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

In effetti, si ha il seguente teorema, che non dimostreremo.

Teorema 3. *Data una curva* $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$*, e dato* $\epsilon > 0$*, esiste* $\delta > 0$ *tale che, per ogni partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$ *di ampiezza* $|\mathcal{P}| < \delta$*, si ha*

$$|L_a^b(\alpha) - L_a^b(\alpha, \mathcal{P})| < \epsilon.$$

Tutto ciò suggerisce la seguente

Definizione 4. *Dato un'arco di curva* $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *definiamo la sua lunghezza come*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

3 Isometrie di $\mathbf{R}^n$

• Un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ si dice un'*isometria* se conserva la distanza, se cioè, per ogni coppia di punti $p, q \in \mathbf{R}^n$, si ha:

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

• Un'isometria si dice anche *movimento rigido* o *congruenza* di $\mathbf{R}^n$.

Tale definizione si applica in particolare a isometrie di $\mathbf{R}^2$ (il piano) e $\mathbf{R}^3$ (lo spazio). In tal caso, si dimostra che ogni isometria, oltre a conservare la distanza, conserva l'area di una figura, e il suo volume (in dimensione 3).

• Un'isometria di $\mathbf{R}^2$ trasforma rette in rette; un'isometria di $\mathbf{R}^3$ trasforma rette in rette e piani in piani.

Ecco alcuni esempi di isometrie di $\mathbf{R}^2$: (qui le coordinate di un punto sono scritte in forma colonna $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$):

• La *traslazione di vettore* b:

$$f(p) = p + b,$$

dove b è un vettore fissato di $\mathbf{R}^n$.

• La *rotazione di angolo* θ *intorno all'origine* (in senso antiorario):

$$f(p) = Ap,$$

dove A è la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Qui Ap indica il prodotto della matrice A per il vettore colonna p. In conclusione,

$$f(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{pmatrix}.$$

- Altri esempi: simmetria (ribaltamento) intorno a una retta del piano (se $n = 2$); simmetria attorno a una retta, o a un piano, nel caso di $\mathbf{R}^3$.
- In generale, data una matrice *ortogonale* A di ordine n, l'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$:

$$f(p) = Ap$$

risulta essere sempre un'isometria (ricordiamo che una matrice quadrata A si dice ortogonale se $AA^t = I$, la matrice identità di ordine n).

Ora, è chiaro che componendo due isometrie si ottiene ancora un'isometria; dunque l'applicazione

$$f(p) = Ap + b$$

dove A è una matrice ortogonale $n \times n$, e b è un vettore fissato, è sempre un'isometria. Il risultato fondamentale è che in effetti ogni isometria si esprime in tal modo.

Teorema 5. *Un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è un'isometria se e solo se possiamo trovare un vettore $b \in \mathbf{R}^n$ e una matrice ortogonale A tali che*

$$f(p) = Ap + b$$

per ogni $p \in \mathbf{R}^n$.

3.1 Invarianza per isometrie

Ora, se $\alpha : [a, b] \in \mathbf{R}^n$ è un' arco di curva differenziabile, e $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è un'isometria, anche la curva $f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ sarà differenziabile. La nozione appena introdotta di lunghezza di un arco di curva risulta essere *invariante per isometrie*, nel senso seguente:

- Per ogni isometria f, la lunghezza dell'arco $f \circ \alpha$ è uguale alla lunghezza dell'arco α.

3.2 La lunghezza di un arco di curva è indipendente dalla parametrizzazione

Un *diffeomorfismo* ϕ tra gli intervalli $[c, d]$ e $[a, b]$ è una funzione differenziabile biunivoca:

$$\phi : [c, d] \to [a, b]$$

con derivata prima mai nulla (quindi $\phi' > 0$ oppure $\phi' < 0$ per ogni punto di $[c, d]$). Quindi ϕ ammette un unica funzione inversa $\phi^{-1} : [c, d] \to [a, b]$, che risulta, anch'essa, un diffeomorfismo.

- *Dato un arco di curva $\alpha : [c, d] \to \mathbf{R}^2$, e dato un diffeomorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$, la curva*

$$\beta \doteq \alpha \circ \phi : [c, d] \to \mathbf{R}^2,$$

è detta riparametrizzazione di α.

È chiaro che α e $\alpha \circ \phi$ hanno la stessa immagine, quindi la stessa traccia; è anche chiaro che, se β è una riparametrizzazione di α, allora α è una riparametrizzazione di β.

• Si può pensare a una riparametrizzazione di una curva α come ad una curva con la stessa traiettoria, ma con "legge del moto" diversa.

Esempio. Si consideri la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

che parametrizza il segmento di retta che unisce $(1, -2)$ e $(7, 1)$. Sia

$$\phi : [1, 2] \to [0, 3]$$

il diffemorfismo definito da $\phi(t) = t^2 - 1$. La curva $\beta = \alpha \circ \phi$:

$$\beta : \begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = t^2 - 3 \end{cases}, \quad t \in [1, 2],$$

è una riparametrizzazione di α, e ha per traccia lo stesso segmento di retta. Si noti che, mentre il vettore velocità di α ha componenti $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e ha dunque norma $\sqrt{5}$ (costante), il vettore velocità di β ha componenti $\begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}$ che variano durante il moto, e ha norma $\sqrt{20}t$ nel dato intervallo.

Un *invariante geometrico* di una curva è una grandezza geometrica che non dipende dalla parametrizzazione della curva, ma solo dalla sua traccia (traiettoria). È naturale pensare che la lunghezza di un arco di curva sia un tale invariante geometrico.
In effetti, è facile dimostrare che è proprio cosi'.

Lemma 6. *La lunghezza di un arco di curva è indipendente dalla parametrizzazione. In altre parole, se $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è una curva e $\beta : [c, d] \to \mathbf{R}^2$ è una riparametrizzazione di α, allora*

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta).$$

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha $\beta = \alpha \circ \phi$ per un diffeomeorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$. Supponiamo che $\phi'(t) > 0$ per ogni t. Allora $\beta'(t) = \alpha'(\phi(t))\phi'(t)$ e quindi:

$$|\beta'(t)| = |\alpha'(\phi(t))|\phi'(t).$$

Ora:

$$\begin{aligned} L_c^d(\beta) &= \int_c^d |\beta'(t)|\, dt \\ &= \int_c^d |\alpha'(\phi(t))|\phi'(t) dt \end{aligned}$$

Con la sostituzione $u = \phi(t)$ nell'integrale a destra, otteniamo:

$$L_c^d(\beta) = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} |\alpha'(u)|\, du = \int_a^b |\alpha'(u)|\, du = L_a^b(\beta).$$

Il secondo passaggio è giustificato dal fatto che ϕ è biunivoca, crescente, dunque $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. Il caso in cui ϕ' sia negativa su $[c, d]$ si dimostra in modo simile.

□

Esempio. Consideriamo $\alpha : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ e $\beta : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}^2$ definite risp. da

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Si vede subito che α e β hanno la stessa traccia: una semicirconferenza di raggio unitario. In effetti, β è una riparametrizzazione di α, poiché $\beta = \alpha \circ \phi$ dove $\phi : [0, \pi/2] \to [0, \pi]$ è il diffeomorfismo definito da $\phi(t) = 2t$. La lunghezza, in ciascun caso, è π.

3.3 Ascissa curvilinea

Dato un arco di curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ regolare, cosicché

$$\alpha'(t) \neq 0$$

per ogni t, definiamo la funzione *ascissa curvilinea* con origine in a come la lunghezza dell'arco di curva definito da α da a a t:

$$s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)|\, du.$$

Notiamo che $s(0) = 0$ e $s(b) = L \doteq L_a^b(\alpha)$, la lunghezza totale dell'arco. Poiché $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ per ogni $t \in [a, b]$, la funzione s definisce un diffeomorfismo

$$s : [a, b] \to [0, L]$$

dove L è la lunghezza dell'arco. Detto $\phi = s^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ l'inverso, riparametrizziamo la curva α tramite s^{-1}:

$$\bar{\alpha} \doteq \alpha \circ s^{-1}.$$

La curva $\bar{\alpha}$ ha la stessa traccia di α, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Notiamo che $\bar{\alpha} \circ s = \alpha$, cioè:

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)), \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$\alpha'(t) = \bar{\alpha}'(s(t)) \cdot s'(t)$$

dunque, prendendo la norma ad ambo i membri:

$$|\alpha'(t)| = |\bar{\alpha}'(s(t))| \cdot s'(t),$$

e tenendo conto del fatto che $s'(t) = |\alpha'(t)|$, otteniamo:

$$|\bar{\alpha}'(s)| = 1.$$

Dunque, se il parametro è l'ascissa curvilinea, il vettore velocità ha norma unitaria per ogni valore di s. In conclusione:

Proposizione 7. *Ogni curva $\alpha(t)$ può essere riparametrizzata dall'ascissa curvilinea; se il parametro è l'ascissa curvilinea scriveremo*

$$\alpha = \alpha(s), \quad s \in [0, L],$$

dove L è la lunghezza della traccia di α. Inoltre, il vettore velocità $\alpha'(s)$ ha norma costante, uguale a 1 per ogni $s \in [0, L]$.

• L'ascissa curvilinea sarà sempre indicata con la lettera s. Quando la curva è parametrizzata dall'ascissa curvilinea scriveremo, brevemente: PAC. Dunque $\alpha = \alpha(s)$, e il vettore velocità sarà indicato con $T(s)$:

$$T(s) \doteq \alpha'(s).$$

Ricordiamo che $T(s)$ ha norma unitaria, ed è detto *versore tangente* di $\alpha(s)$.

• Da quanto detto in precedenza, si ha che α è parametrizzata dall'ascissa curvilinea se e solo se il vettore velocità ha norma unitaria costante.

Esempio. Si consideri la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

la cui traccia è il segmento di retta che unisce $(1, -2)$ e $(7, 1)$. Si ha: $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che ha norma costante $\sqrt{5}$, quindi non unitaria. La lunghezza totale è $L = 3\sqrt{5}$ e la funzione ascissa curvilinea è $s : [0, 3] \to [0, 3\sqrt{5}]$ definita da:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}t$$

la cui inversa è $\phi(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}s$, che indicheremo anche con $t = t(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}s$. La parametrizzazione tramite ascissa curvilinea è:

$$\bar{\alpha}(s) = \begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}s \\ y = -2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases} \quad s \in [0, 3\sqrt{5}].$$

Notiamo che in effetti:

$$T(s) = |\bar{\alpha}'(s)| = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ha norma unitaria costante.

Esempio. La *spirale logaritmica* è la curva piana $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t).$$

Calcolare la funzione ascissa curvilinea a partire da $t = 0$, riparametrizzare dall'ascissa curvilinea e studiare la sua traccia.

4 Teoria locale delle curve piane

Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ una curva piana regolare, PAC. Denotiamo con $T(s)$ il suo versore tangente:

$$\alpha'(s) = T(s).$$

Si noti che $T : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è una funzione vettoriale differenziabile. Poichè α è PAC, si avrà $|T(s)| = 1$ per ogni s. Nel punto $\alpha(s)$ avremo due versori normali a $T(s)$. Sceglieremo

$$N(s) = JT(s),$$

dove J è la rotazione di angolo $\pi/2$ intorno all'origine, nel senso antiorario. Si noti che J è rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$. Questo significa che, se

$$T(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix}$$

allora:

$$N(s) = JT(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_2(s) \\ T_1(s) \end{pmatrix}.$$

- $N(s)$ è detto *versore normale* di α in s (o in $\alpha(s)$).
- Abbiamo dunque in ogni punto della traccia di α una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ data dalla coppia $(T(s), N(s))$, detto anche *riferimento di Frenet*.

Tale base è orientata in modo concorde alla base (e_1, e_2), dove $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Abbiamo le seguenti identità, valide per ogni valore di s:

$$|T(s)|^2 = 1, \quad |N(s)|^2 = 1, \quad \langle T(s), N(s)\rangle = 0.$$

4.1 Curvatura

Se una curva è PAC, la derivata $\alpha'(s) = T(s)$ ha modulo costante, uguale a 1. Un modo per misurare la curvatura è quello di misurare quanto rapidamente cambia la direzione del suo versore tangente. Questo si fa derivando $T(s)$, cioè calcolando $T'(s) = \alpha''(s)$ (che è un vettore, detto *accelerazione* di α). Siccome $\langle T(s), T(s)\rangle = 1$, derivando otteniamo

$$\langle T'(s), T(s)\rangle = 0$$

per ogni s. Ne segue che $T'(s)$ è ortogonale a $T(s)$, dunque parallelo a $N(s)$, e possiamo scrivere:

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

per un certo $k(s) \in \mathbf{R}$.

- $k(s)$ è detta *curvatura di α in s.*

Notiamo che $k(s)$ può essere sia positive che negativa (o nulla, ovviamente), e inoltre

$$|k(s)| = |\alpha''(s)|$$

quindi il valore assoluto della curvatura uguaglia la norma del vettore accelerazione (ma attenzione, solo se la curva è parametrizzata dall'ascissa curvilinea !).
Dalla definizione otteniamo subito la seguente espressione:

$$k(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle.$$

D'altra parte, dalla definizione dell'operatore di rotazione J si ha che, per ogni coppia di vettori v, w del piano:

$$\langle v, Jw\rangle = \det(w, v) = -\det(v, w)$$

dove a destra si ha il determinate della matrice di colonne v e w. Poichè $T'(s) = \alpha''(s)$ e $N(s) = JT(s) = J\alpha'(s)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle T'(s), N(s)\rangle \\ &= \langle \alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle \\ &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \end{aligned}$$

quindi

$$k(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)).$$

- $k(s)$ dipende dal verso di percorrenza !

Esempio. La curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$:

$$\alpha(s) = \begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}s \\ y = -2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases} \qquad s \in \mathbf{R}$$

parametrizza la retta del piano di equazione cartesiana $x-2y-5=0$ (ottenuta eliminando il parametro s). Si ha:

$$T(s)=\sqrt{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad N(s)=\sqrt{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

entrambi costanti. Poiché $T'(s)=0$, l'accelerazione è nulla ovunque: dunque anche la curvatura è nulla ovunque.

- *Ogni retta ha curvatura nulla* (generalizzare l'argomento precedente).

Esempio. La curva

$$\alpha:\begin{cases}x=R\cos(\dfrac{s}{R})\\ y=R\sin(\dfrac{s}{R})\end{cases},\quad s\in[0,2\pi R]$$

ha per traccia la circonferenza di centro l'origine e raggio R, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea poiché $|\alpha'(s)|=1$. Notiamo che la circonferenza è percorsa in senso antiorario. Si ha:

$$\alpha'(s)=\begin{pmatrix}-\sin\frac{s}{R}\\ \cos\frac{s}{R}\end{pmatrix},\quad \alpha''(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\\ -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\end{pmatrix}$$

Per calcolare la curvatura, dobbiamo incolonnare le componenti dei vettori velocità e accelerazione, e calcolare il determinante della matrice cosi' ottenuta:

$$k(s)=\det(\alpha'(s),\alpha''(s))=\det\begin{pmatrix}-\sin\frac{s}{R} & -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\\ \cos\frac{s}{R} & -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\end{pmatrix}=\frac{1}{R}.$$

Dunque:

- *La curvatura di una circonferenza, percorsa in senso antiorario, è costante, ed è uguale all'inverso del raggio.*

- Cambiando s in $-s$ nelle equazioni precedenti, cambia il verso di percorrenza e quindi il segno della curvatura. Percorsa in senso orario, la circonferenza ha curvatura data dall'opposto dell'inverso del raggio.

Anche se è sempre possibile parametrizzare una curva con l'ascissa curvilinea, è spesso impossibile trovare un'espressione *esplicita* dell'ascissa curvilinea in funzione delle funzioni dette "elementari"(polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziali, logaritmi etc.).

Esempio. La funzione ascissa curvilinea, con origine in $t=0$, della curva

$$\alpha:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$

(la cui traccia è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) è:

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2u+b^2\cos^2u}\,du,$$

Se $a \neq b$, l'integrale non è immediatamente esprimibile in funzione delle funzioni elementari.

È dunque opportuno saper calcolare la curvatura direttamente a partire da una parametrizzazione qualunque, senza passare attraverso l'ascissa curvilinea. Ecco dunque la formula esplicita.

Teorema 8. *Sia $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ una parametrizzazione di una curva regolare, non necessariamente PAC. Allora:*

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Per la verifica, osserviamo innanzitutto che possiamo riparametrizzare la curva tramite l'ascissa curvilinea $\bar{\alpha}(s)$ con $|\bar{\alpha}|'(s) = 1$. Possiamo scrivere:

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)).$$

Dunque:

$$\alpha'(t) = \bar{\alpha}'(s) \cdot s'(t), \quad \alpha''(t) = \bar{\alpha}''(s) \cdot s'(t)^2 + \bar{\alpha}'(s) \cdot s''(t).$$

Ora sappiamo che:

$$\bar{\alpha}'(s) = T(s), \quad \bar{\alpha}''(s) = T'(s) = k(s)N(s), \quad s'(t) = |\alpha'(t)|, \quad s''(t) = \frac{d}{dt}|\alpha'(t)|.$$

Ne segue che, poiché $s'(t) = |\alpha'(t)|$:

$$\alpha'(t) = |\alpha'(t)|T(s), \quad \alpha''(t) = k(s)|\alpha'(t)|^2 N(s) + \frac{d}{dt}|\alpha'(t)| \cdot T(s).$$

Poiché $\det(T(s), T(s)) = 0$, e $\det(T(s), N(s)) = \det(T(s), JT(s)) = |T(s)|^2 = 1$:

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = |\alpha'(t)|^3 k(s) \det(T(s), N(s)) = |\alpha'(t)|^3 k(s),$$

e la tesi segue dividendo ambo i membri per $|\alpha'(t)|^3$.

4.2 Formule di Frenet

Dall'identità $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$ otteniamo, derivando rispetto a s:

$$\langle N'(s), N(s)\rangle = 0$$

dunque $N'(s)$ è ortogonale a $N(s)$, perciò parallelo a $T(s)$; possiamo allora scrivere

$$N'(s) = a(s)T(s)$$

per una funzione $a(s)$. Ora, derivando l 'identità $\langle T(s), N(s)\rangle = 0$ otteniamo

$$\langle T'(s), N(s)\rangle + \langle T(s), N'(s)\rangle = 0$$

da cui otteniamo facilmente $k(s) + a(s) = 0$. Dunque

$$N'(s) = -k(s)T(s).$$

Riassumendo, otteniamo le seguenti relazioni, dette *Formule di Frenet*:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) \end{cases}$$

che possiamo esprimere in forma matriciale come segue:

$$(T'(s), N'(s)) = (T(s), N(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Esercizi

Esercizio 1. Data la curva (spirale logaritmica):

$$\alpha : \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \infty)$$

Stabilire se α è regolare nell'intervallo indicato e studiarne la traccia. Calcolare la funzione ascissa curvilinea con origine in $t = 0$, e infine determinare la sua curvatura.

Esercizio 2. Data la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

determinare i valori di t (e i corrispondenti punti sulla traccia di α) dove α è regolare; calcolare la funzione ascissa curvilinea con origine in $t = 0$, e determinare la curvatura nei punti regolari.

Esercizio 3. Dopo aver parametrizzato l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

calcolare la sua curvatura, e determinare i punti dove la curvatura è massima (risp. minima).

Esercizio 4. Studiare i punti critici e gli insiemi di livello $f^{-1}(c)$ della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 4x - 12y$$

a) Per quali valori di c l'insieme di livello può essere parametrizzato in modo regolare ?

b) Calcolare il valore assoluto della curvatura dell'insieme di livello $f^{-1}(0)$.

Esercizio 5. Disegnare la traccia e calcolare la curvatura dei seguenti archi di curva:

a) $\alpha(t) = (t, t^3)$ nell'intervallo $t \in [-1, 1]$,

b) $\beta(t) = (2 + 3\cos t, -1 + 6\sin t)$ nell'intervallo $t \in [0, 2\pi]$.