

Esercizi complementari

(tratti dagli esercizi del prof. Alberto Del Fra)

⊙ Relazioni

1) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?

$$x, y \in \mathbf{R} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff x/y \in \mathbf{Q} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è divisibile per } 17 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x \neq y \quad \square$$

$$X, Y \text{ sottoinsiemi di un insieme } A \quad X\mathcal{R}Y \iff X \cup Y = X \quad \square$$

2) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme \mathbf{Z} sono di equivalenza:

$$x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff xy \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x/y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

3) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?

$$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy < 0 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 + y^2 \text{ è pari} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^3 + y^3 \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

4) Determinare quali delle seguenti relazioni, definite nell'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali, sono di equivalenza ($\mathbf{R}^n[x]$ è il sottoinsieme dei polinomi di grado non superiore a n):

$$p\mathcal{R}q \iff p - q \in \mathbf{R}^5[x] \quad \square \quad p\mathcal{R}q \iff p/q \in \mathbf{R}^3[x] \quad \square$$

$$p\mathcal{R}q \iff p + q \in \mathbf{R}^2[x] \quad \square \quad p\mathcal{R}q \iff pq \in \mathbf{R}^4[x] \quad \square$$

5) Determinare quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza nell'insieme \mathbf{Z} degli interi relativi:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff xy \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$\text{nessuna delle precedenti} \quad \square$$

6) Detto U l'insieme degli esseri umani, quali delle seguenti relazioni in U sono simmetriche ma non transitive?

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è fratello di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è amico di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è concittadino di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è padre di } y \quad \square$$

7) Quali delle seguenti relazioni verificano la proprietà transitiva ma non la simmetrica?

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff xy = 1 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x < y \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{N} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{Z} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = 0 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 - xy = 0 \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 0 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 - y = 0 \quad \square$$

8) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme dei poligoni piani sono transitive ma non simmetriche:

- x ha la stessa area di y
- x ha area maggiore di quella di y
- x ha area metà di quella di y
- x ha area minore di quella di y
- nessuna delle precedenti

⊙ Applicazioni

9) Quali delle seguenti applicazioni sono iniettive? Quali sono suriettive?

	<i>In</i>	<i>Su</i>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^4 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{\sin x} \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 - 3x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin^3 x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow 2x + 1 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{2x} \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10) Determinare le seguenti controimmagini per le sottoelencate funzioni da \mathbf{R} in \mathbf{R} :

- $f^{-1}(0)$ per $f : x \longrightarrow \cos x$
- $f^{-1}(2)$ per $f : x \longrightarrow x^2$
- $f^{-1}(0)$ per $f : x \longrightarrow e^x$
- $f^{-1}(3)$ per $f : x \longrightarrow 2x$

⊙ Matrici

11) Con operazioni elementari di riga, ridurre a forma triangolare superiore la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Dedurre il determinante ed il rango di } A.$$

12) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

13) Calcolare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

14) Assegnate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = (-1 \ 0 \ 2)$, calcolare la matrice $A \cdot B \cdot C$ e determinarne il rango.

15) Assegnate $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \ 3)$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare la matrice $3(A \cdot B) - 2C$.

⊙ Spazi \mathbf{R}^n

16) Quali dei seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti? Quali costituiscono un insieme di generatori per lo spazio \mathbf{R}^n a cui appartengono? Quali costituiscono una base?

	<i>Ind</i>	<i>Gen</i>	<i>Base</i>
$\mathbf{R}^2 : \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^3 : \{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^2 : \{(1, 2), (3, -1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^3 : \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^2 : \{(1, 1), (2, 2)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(2, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 5)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(2, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 5), (1, 1, 1, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

17) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	<i>V</i>	<i>F</i>
Due vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire una base per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire una base per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire una base per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire un insieme di generatori per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire un insieme di generatori per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di \mathbf{R}^3 possono costituire un insieme di generatori per \mathbf{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di \mathbf{R}^3 possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

18) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni in \mathbf{R}^n :

	<i>V</i>	<i>F</i>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

19) Quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 sono sottospazi?

- $\left\{ \left(a + b, \frac{a-b}{a^2+1}, a \right) : \forall a, b \in \mathbf{R} \right\}$
- $\{(\sqrt{2}a + b, a - \sqrt{2}b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, a^2, a^3) : \forall a \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, a\sqrt{b}, b) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 - x_2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$

20) Dei sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 che siano risultati sottospazi nell'esercizio precedente, determinare una base e quindi la dimensione.

21) Assegnato un sottospazio S di \mathbf{R}^n sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di S . Dato un vettore $v_4 \in S$ distinto dai vettori di \mathcal{B} , stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| $\{v_1, v_2\}$ è una base di S | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| v_1, v_2 sono linearmente indipendenti | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di generatori di S | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di S | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un insieme di generatori di S | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

22) Assegnato un sottospazio S di \mathbf{R}^n di dimensione 3, stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| Comunque si prendano due vettori di S , essi sono lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano due vettori di S , essi sono lin. dipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in S due vettori lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano tre vettori di S , essi sono lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano tre vettori di S , essi sono lin. dipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in S tre vettori lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano quattro vettori di S , essi sono lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano quattro vettori di S , essi sono lin. dipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in S quattro vettori lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Il vettore nullo di \mathbf{R}^n può non appartenere ad S . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Preso un vettore v in S , il vettore $-v$ deve appartenere ad S . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

⊙ Cambiamenti di coordinate

23) Determinare la matrice M del cambiamento di coordinate da \mathcal{B} a \mathcal{B}' e quella del cambiamento di coordinate da \mathcal{B}' a \mathcal{B} (dunque l'inversa di M), essendo:

- A) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1 = (2, 3), v'_2 = (3, -2)\}$;
- B) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1 = (1, -1), v'_2 = (0, 1)\}$.

In entrambi i casi, dette (k_1, k_2) e (k'_1, k'_2) le coordinate di un vettore v rispetto a \mathcal{B} , \mathcal{B}' , rispettivamente, scrivere le formule che esprimono (k'_1, k'_2) in funzione di (k_1, k_2) .

⊙ Sistemi lineari

24) Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$\begin{array}{l}
 a : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad b : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \quad c : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases} \\
 d : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases} \quad e : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \quad f : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \end{cases} \\
 g : \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 1 \\ 3x + 3y - 15z = 2 \end{cases} \quad h : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \quad i : \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 2 \\ 3x + 3y - 15z = 3 \end{cases} \\
 \ell : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + z = 4 \end{cases} \quad m : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 4 \end{cases} \quad n : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

25) Per ciascuno dei precedenti sistemi lineari, descrivere le mutue posizioni delle rette (2 incognite) o dei piani (3 incognite) coinvolti.

26) Determinare i valori del parametro reale t per i quali il sistema $\begin{cases} x + ty = 2 \\ x + 2ty = t \end{cases}$ ammette una sola soluzione, infinite soluzioni, nessuna soluzione.

27) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni

(il tipo del sistema è definito come il tipo della matrice incompleta; $\mathbf{0}$ è una colonna di zeri):

	V	F
Un sistema $n \times n$, $AX = B$, con $\det A = 0$, non ha soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $n \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $\det A = 0$, ha infinite soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema 2×3 , $AX = B$, con $\text{rank}(A) = 2$, ha ∞^1 soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$, $AX = B$, con $n > m$, è necessariamente compatibile.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $n > m$, ha infinite soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $n > m$, ha ∞^{n-m} soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se \bar{X} è soluzione del sistema $AX = \mathbf{0}$, anche $k\bar{X}$ lo è, $\forall k \in \mathbf{R}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se \bar{X} è soluzione del sistema $AX = B$, con $B \neq \mathbf{0}$, anche $k\bar{X}$ lo è, $\forall k \in \mathbf{R}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

28) Assegnate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, tale che risulti $AX = B$.

29) Quali delle seguenti applicazioni $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sono lineari?

$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_3^2, x_1 + x_2 + x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1}, x_1, x_3 \right)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{2}x_1 - x_2 + \pi x_3, (\log 3)x_1 - x_2, (\sin 3)x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1} + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3 + 1, x_1 + 3x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, 0)$	<input type="checkbox"/>

30) Determinare $L^{-1}(0, 0, 0)$, controimmagine del vettore nullo secondo l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, data da $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3)$. Dimostrare che $L^{-1}(0, 0, 0)$ è un sottospazio di \mathbf{R}^3 . Determinarne una base e la dimensione.

31) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, definita da $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Se (k_1, k_2) sono le coordinate di un vettore \underline{v} rispetto a \mathcal{B} , quali sono le coordinate di $L(\underline{v})$ rispetto a \mathcal{B} ?

32) Date le applicazioni lineari $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\bar{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, definite da $L(x, y) = (x + 5y, 2x - y)$, $\bar{L}(x, y) = (3x - y, x + 2y)$, determinare le applicazioni composte $\bar{L}L$, $L\bar{L}$.

33) Data l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, definita da $L(x, y) = (2x - y, x + 2y)$, dimostrare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.

⊙ Autovalori ed autovettori

34) Determinare autovalori ed autovettori per le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dire per ognuna di esse se è diagonalizzabile ed in caso affermativo, calcolarne la forma diagonale.

35) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

		V	F
Un autovalore è necessariamente diverso da zero.	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Se un autovalore è zero, allora ammette un autovettore nullo.	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Un autovettore è necessariamente diverso dal vettore nullo.	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ è di secondo grado.	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice A sono gli autovettori di A .	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice A sono gli autovalori di A .	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
Gli autovettori di una matrice A sono tutte le soluzioni di $AX = \mathbf{0}$.	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>

⊙ Geometria analitica piana

Nei prossimi esercizi è sottintesa l'assegnazione nel piano di un riferimento cartesiano di origine O e di versori degli assi \vec{i} , \vec{j} .

36) Assegnati i vettori $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, determinare il vettore $(\vec{v} \times \vec{w})\vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{u})\vec{w}$.

37) Determinare il modulo del vettore $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

38) Determinare il versore \vec{u} che ha la stessa direzione e verso opposto di $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

39) Determinare il coseno dell'angolo tra i vettori $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

40) Determinare i vettori di modulo 2 paralleli a $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

41) Determinare i versori \vec{u} che formano un angolo $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ con $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

42) Determinare la distanza tra i punti $P_1(1, -1)$, $P_2(-4, 5)$.

- 43) Determinare l'area del triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 1)$.
- 44) Determinare un'equazione (cartesiana) della retta passante per $P_1(2, 4)$, $P_2(-1, 3)$.
- 45) Determinare un'equazione cartesiana, ed equazioni parametriche, della retta passante per $P_1(3, 4)$, $P_2(3, -5)$.
- 46) Determinare l'equazione della retta passante per $P_0(1, 2)$, parallela alla retta passante per i punti $P_1(1, 3)$, $P_2(-1, 4)$.
- 47) Determinare l'equazione della retta passante per $P_0(1, 2)$, perpendicolare alla retta passante per i punti $P_1(1, 3)$, $P_2(-1, 4)$.
- 48) Determinare parametri direttori di $r : 2x + 3y - 1 = 0$.
- 49) Determinare i versori paralleli a $r : 2x + 3y - 1 = 0$.
- 50) Determinare i versori perpendicolari a $r : 2x + 3y - 1 = 0$.
- 51) Determinare il coseno dell'angolo ottuso formato dalle rette $r : x + y + 3 = 0$, $r' : 5x - 2y + 8 = 0$.
- 52) Determinare la proiezione del vettore $\vec{v}(2, -1)$ sulla retta $r : 3x + 4y - 1 = 0$, orientata secondo il verso delle x crescenti.
- 53) Determinare la distanza tra il punto $P_0(1, -3)$ e la retta $r : x + 2y - 1 = 0$.
- 54) Tra le rette parallele a $r : x + 2y = 0$, determinare quelle che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $P_0(1, -1)$.
- 55) Assegnati i punti $A(0, 0)$ e $B(5, 12)$, determinare i punti C per i quali il triangolo ABC risulti isoscele e rettangolo in A .
- 56) Assegnato il triangolo di vertici $A(0, 0)$, $B(2, -4)$, $C(4, 6)$, determinare sulla mediana del lato BC i punti che distano $2\sqrt{5}$ da A .
- 57) Nel piano, al variare di (a, b) in $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$, l'equazione $ax + by + 1 = 0$ rappresenta:
un fascio improprio di rette la totalità delle rette per l'origine
un fascio proprio di rette nessuna delle precedenti
- 58) Determinare l'equazione (canonica) della circonferenza passante per il punto $(2, 1)$ e tangente nell'origine la retta di equazione $2x - 9y = 0$.
- 59) Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sull'asse x e passante per i punti $(2, 1)$ e $(3, \sqrt{2})$.
- 60) Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, tangenti alla retta $r : 2x + y - 2 = 0$ nel punto $A(-1, 4)$.

⊙ Spazio euclideo

- 61) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $(2, 3, 0)$, $(3, 0, -2)$ e $(4, -3, 4)$.
- 62) Determinare il piano per l'origine parallelo alle rette $r : x - 2z = y + z - 1 = 0$ e $s : x - 3z + 2 = y + 2z + 4 = 0$.

- 63) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $(0, 1, 2)$ e contenente la retta di equazioni $x - 2y + 4z = 2x + y - z + 1 = 0$.
- 64) Determinare il piano contenente la retta $r : x + y - 3 = x - 2y + z = 0$ e parallelo alla retta $s : x - z = y - 2z = 0$
- 65) Determinare il piano per l'origine che risulta parallelo alla retta $r : x + z + 1 = y - 3z = 0$ e perpendicolare al piano $v : 2x + y - 3z = 0$
- 66) Determinare il piano α contenente la retta $r : x - 5z = y - 2z = 0$ e perpendicolare al piano $\beta : x + y + z = 0$.
- 67) Determinare il piano α passante per i punti $(1, -1, 2)$, $(2, 3, -1)$ e perpendicolare al piano $\beta : x + y + z = 0$.
- 68) Determinare la proiezione ortogonale della retta $r : x - 3y + 4z = 2x + 5y - z = 0$ sul piano di equazione $3x - y + 7z = 0$.
- 69) Determinare la proiezione ortogonale del punto $(1, 2, 3)$ sul piano di equazione $3x - y + 2z = 0$.
- 70) Determinare il piano per il punto $(2, 3, 0)$ perpendicolare alla retta $r : x - 2y = 0, x - y + z = 0$.
- 71) Individuare, tra le seguenti, le coppie di piani perpendicolari:
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : x + y + 3z - 7 = 0 \quad \square$
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : 6x + 3y - 2z - 7 = 0 \quad \square$
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : 5x - 9y - 1 = 0 \quad \square$
- 72) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(1, 3, 0)$.
- 73) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta passante per i punti $(1, 2, -1)$, $(3, 2, 0)$.
- 74) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto $(-1, 0, 4)$ e parallela alla retta di equazioni parametriche $x = 2t, y = -t, z = 3t$.
- 75) Tra le seguenti rette (date in equazioni parametriche o cartesiane) determinare quelle parallele al piano $\pi : 2x - y + z = 0$:
 $x - 2z + 1 = y + z + 3 = 0 \quad \square \quad x = t + 1, y = 2t - 4, z = 0 \quad \square$
 $x = 2t, y = -t + 3, z = t - 1 \quad \square \quad x - z + 2 = y - 3z = 0 \quad \square$
nessuna delle precedenti \square
- 76) Determinare parametri direttori delle rette parallele ai piani $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ e $\beta : 2x - y + 3z + 4 = 0$.
- 77) Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane $x - y + z + 4 = x + y - 5z + 2 = 0$.
- 78) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto $(0, 2, 1)$ e parallela alla retta di equazioni $x + 3y + z + 1 = x - 2y - z = 0$.

- 79) Determinare la retta per l'origine che risulti incidente le rette $r : x - 2z + 1 = y + 3z - 5 = 0$ e $s : x - 5z = y + z + 1 = 0$.
- 80) Determinare i valori del parametro t per i quali i seguenti piani si incontrano in esattamente un punto: $(4 - t)y - 3z + 1 = 0$, $x + 2y - z = 0$, $2y - (1 + t)z + 2 = 0$.
- 81) Individuare i valori del parametro t per i quali le rette: $x - 3z - 1 = y - 2z - 3 = 0$ e $s : x - 5z - 1 = y - 4z - t = 0$ sono complanari.
- 82) Determinare i valori di t per i quali il sistema $x + y + 2z - 2 = x + y + tz - 2 = tx + y + z - 1 = 0$ rappresenta una retta.
- 83) Nello spazio euclideo l'equazione $x + y - 1 = 0$ rappresenta:
una retta del piano xy un piano contenente l'asse z
un piano parallelo al piano xy un piano parallelo all'asse z
- 84) Quali dei seguenti sistemi rappresentano una retta?
 $x + 2y - 3z + 1 = 5x + 10y - 15z + 2 = 0$
 $2x - y + 3z + 5 = x + 3y - 5z = 3x + 2y - 2z + 5 = 0$
 $3x - y + z = x + 2y - z = 2x + 2y + 3z = 0$
- 85) Assegnati i punti $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(t, -1, t - 1)$, determinare i valori del parametro reale t per i quali l'area del triangolo ABC vale $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
- 86) Assegnate le rette $r : x - 2z + 1 = y + z + 3 = 0$ e $s : x + z = y - z - 2 = 0$, determinare $\cos \widehat{rs}$.
- 87) Determinare i versori della retta $r : x + y - 3z + 2 = x - y + 2z = 0$.
- 88) Determinare parametri direttori delle rette perpendicolari alle rette $r : x - 5z + 1 = y + z = 0$ e $s : x - 3z = y + 2z = 0$.
- 89) Determinare la distanza tra le rette $r : x + 2y - 2z = x + y = 0$ e $s : x - z = y - 2z - 2 = 0$.
- 90) Determinare la distanza tra le rette parallele $r : x - y = y - z = 0$ e $s : x - y + 5 = y - z + 5 = 0$.
- 91) Determinare la distanza del punto $P(1, -3, 3)$ dalla retta $r : x - 2z = y + 3z = 0$.
- 92) Determinare i piani contenenti la retta $r : x + y - 5z = x - y + 1 = 0$ e che abbiano distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dall'origine.
- 93) Determinare i punti della retta $r : x - z - 1 = y - 2z + 1 = 0$ aventi distanza 1 dal piano $\pi : 3x + 2y - 6z = 0$.
- 94) Sulla retta per $P(1, 1, 1)$ perpendicolare al piano $u : x + 2y - 3z = 0$ determinare i punti che distano 5 dal piano $v : x + 2y - 2z + 3 = 0$.
- 95) Dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(1, 1, 2)$, determinare i punti P della retta $r : x - z = y - 2z + 1 = 0$ per i quali il triangolo ABP abbia area $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- 96) Determinare sulla retta $r : x - z + 1 = y - 2z = 0$ i punti la cui distanza dall'origine sia 3.

- 97) Dato il piano $\pi : 2x - 3y + 6z = 0$, determinare i piani aventi distanza 2 da π .
- 98) Determinare l'equazione della sfera avente centro nell'origine e tangente al piano $x - 2y + 2z + 2 = 0$.
- 99) Tra le sfere di centro il punto $(3, 0, 0)$, determinare quella tangente al piano di equazione $x + y + z = 0$.
- 100) Determinare l'equazione della sfera avente centro sulla retta $r : x - y = y + z = 0$ e passante per i punti $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2)$.

⊙ Vettori liberi

- 101) Mostrare con un esempio che l'operazione di prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.
- 102) Assegnati i vettori liberi $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, determinare $(\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})\vec{w}$.
- 103) Assegnati i vettori liberi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determinare $[(\vec{v} \wedge \vec{w}) \times (\vec{w} \wedge \vec{v})]\vec{v}$.
- 104) Assegnati i vettori $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, determinare il vettore \vec{w} parallelo a \vec{u} tale che $\vec{w} \times \vec{v} = 5$.
- 105) Determinare i valori dei parametri s, t per cui il vettore $(s + 1)\vec{i} + (s + t)\vec{j} + t\vec{k}$ è parallelo al vettore $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.