Soluzioni – esercizi complementari

⊙ Relazioni

1) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?
$x, y \in \mathbf{R} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff x/y \in \mathbf{Q}$ ☒
$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x + y$ è divisibile per 17 ☐
$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x \neq y$ ☐
X, Y sottoinsiemi di un insieme $A \quad X\mathcal{R}Y \iff X \cup Y = X$ ☐

2) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme $\mathbf{Z}$ sono di equivalenza:
$x\mathcal{R}y \iff x + y$ è divisibile per 3 ☐ $x\mathcal{R}y \iff xy$ è divisibile per 3 ☐
$x\mathcal{R}y \iff x/y$ è divisibile per 3 ☐ $x\mathcal{R}y \iff x - y$ è divisibile per 3 ☒

3) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?
$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0$ ☒
$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy < 0$ ☐
$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 + y^2$ è pari ☒
$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^3 + y^3$ è divisibile per 3 ☐

4) Determinare quali delle seguenti relazioni, definite nell'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali, sono di equivalenza ($\mathbf{R}^n[x]$ è il sottoinsieme dei polinomi di grado non superiore a n):
$p\mathcal{R}q \iff p - q \in \mathbf{R}^5[x]$ ☒ $p\mathcal{R}q \iff p/q \in \mathbf{R}^3[x]$ ☐
$p\mathcal{R}q \iff p + q \in \mathbf{R}^2[x]$ ☐ $p\mathcal{R}q \iff pq \in \mathbf{R}^4[x]$ ☐

5) Determinare quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza nell'insieme $\mathbf{Z}$ degli interi relativi:
$x\mathcal{R}y \iff x - y$ è un quadrato perfetto ☐
$x\mathcal{R}y \iff x + y$ è un quadrato perfetto ☐
$x\mathcal{R}y \iff xy$ è un quadrato perfetto ☐
nessuna delle precedenti ☒

6) Detto U l'insieme degli esseri umani, quali delle seguenti relazioni in U sono simmetriche ma non transitive?
$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x$ è fratello di y ☐
$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x$ è amico di y ☒
$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x$ è concittadino di y ☐
$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x$ è padre di y ☐

7) Quali delle seguenti relazioni verificano la proprietà transitiva ma non la simmetrica?
$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff xy = 1$ ☐
$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x < y$ ☒
$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{N}$ ☒
$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{Z}$ ☐
$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = 0$ ☐ $x\mathcal{R}y \iff x^2 - xy = 0$ ☒
$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 0$ ☐ $x\mathcal{R}y \iff x^2 - y = 0$ ☐

8) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme dei poligoni piani sono transitive ma non simmetriche:
x ha la stessa area di y ☐

x ha area maggiore di quella di y ☒
x ha area metà di quella di y ☐
x ha area minore di quella di y ☒
nessuna delle precedenti ☐

⊙ Applicazioni

9) Quali delle seguenti applicazioni sono iniettive? Quali sono suriettive?

	In	*Su*
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^4 \in \mathbf{R}$	☐	☐
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^x \in \mathbf{R}$	☒	☐
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin x \in \mathbf{R}$	☐	☐
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{\sin x} \in \mathbf{R}$	☐	☐
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 \in \mathbf{R}$	☒	☒
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 - 3x \in \mathbf{R}$	☐	☒
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin^3 x \in \mathbf{R}$	☐	☐
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow 2x + 1 \in \mathbf{R}$	☒	☒
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{2x} \in \mathbf{R}$	☒	☐

10) Determinare le seguenti controimmagini per le sottoelencate funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$:
$f^{-1}(0)$ per $f : x \longrightarrow \cos x$ .... $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in Z\}$
$f^{-1}(2)$ per $f : x \longrightarrow x^2$ .... $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
$f^{-1}(0)$ per $f : x \longrightarrow e^x$ .... $\emptyset$
$f^{-1}(3)$ per $f : x \longrightarrow 2x$ .... $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

⊙ Matrici

11) Con operazioni elementari di riga, ridurre a forma triangolare superiore la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dedurne il determinante ed il rango di A.

R. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$; $\det A = 96$; $rank(A) = 4$.

12) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

R. $rank(A_1) = 4$; $rank(A_2) = 1$; $rank(A_3) = 2$; $rank(A_4) = 2$; $rank(A_5) = 3$.

13) Calcolare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

R. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

14) Assegnate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare la matrice $A \cdot B \cdot C$ e determinarne il rango.

R. $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 14 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $rank(ABC) = 1$.

15) Assegnate $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare la matrice $3(A \cdot B) - 2C$.

R. $3(A \cdot B) - 2C = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ -10 & 16 \end{pmatrix}$.

⊙ Spazi $\mathbf{R}^n$

16) Quali dei seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti? Quali costituiscono un insieme di generatori per lo spazio $\mathbf{R}^n$ a cui appartengono? Quali costituiscono una base?

	Ind	*Gen*	*Base*
$\mathbf{R^2} : \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$	☐	☒	☐
$\mathbf{R^3} : \{(1,1,1),(1,0,0)\}$	☒	☐	☐
$\mathbf{R^2} : \{(1,2),(3,-1)\}$	☒	☒	☒
$\mathbf{R^3} : \{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(2,1,1)\}$	☐	☒	☐
$\mathbf{R^2} : \{(1,1),(2,2)\}$	☐	☐	☐
$\mathbf{R^4} : \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,1,1,0)\}$	☐	☐	☐
$\mathbf{R^4} : \{(2,0,0,0),(0,3,0,0),(0,0,4,0),(0,0,0,5)\}$	☒	☒	☒
$\mathbf{R^4} : \{(2,0,0,0),(0,3,0,0),(0,0,4,0),(0,0,0,5),(1,1,1,1)\}$	☐	☒	☐

17) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	V	*F*
Due vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire una base per $\mathbf{R^3}$.	☐	☒
Tre vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire una base per $\mathbf{R^3}$.	☒	☐
Quattro vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire una base per $\mathbf{R^3}$.	☐	☒
Due vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R^3}$.	☐	☒
Tre vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R^3}$.	☒	☐
Quattro vettori di $\mathbf{R^3}$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R^3}$.	☒	☐
Due vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente indipendenti.	☒	☐
Due vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente dipendenti.	☒	☐
Tre vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente indipendenti.	☒	☐
Tre vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente dipendenti.	☒	☐
Quattro vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente indipendenti.	☐	☒
Quattro vettori di $\mathbf{R^3}$ possono essere linearmente dipendenti.	☒	☐

18) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni in $\mathbf{R}^n$:

	V	F
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\Longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. indipendenti.	☐	☒
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\Longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. dipendenti.	☒	☐
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\Longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indipendenti.	☒	☐
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\Longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. dipendenti.	☐	☒

19) Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono sottospazi?

$\left\{\left(a+b, \dfrac{a-b}{a^2+1}, a\right) : \forall a, b \in \mathbf{R}\right\}$	☐
$\{(\sqrt{2}a+b, a-\sqrt{2}b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$	☒
$\{(a, a^2, a^3) : \forall a \in \mathbf{R}\}$	☐
$\{(a, b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$	☒
$\{(a, a\sqrt{b}, b) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$	☐
$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$	☒
$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 - x_2 = 0\}$	☐
$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$	☒

20) Dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ che siano risultati sottospazi nell'esercizio precedente, determinare una base e quindi la dimensione.

R.
$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_1 = \{(\sqrt{2}, 1, 1), (1, -\sqrt{2}, 0)\}, \quad \dim \mathcal{B}_1 = 2;\\
&\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}, \quad \dim \mathcal{B}_2 = 2;\\
&\mathcal{B}_3 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \quad \dim \mathcal{B}_3 = 2;\\
&\mathcal{B}_4 = \{(1, 1, -1)\}, \quad \dim \mathcal{B}_4 = 1.
\end{aligned}$$

21) Assegnato un sottospazio S di $\mathbf{R}^n$ sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una base di S. Dato un vettore $\underline{v}_4 \in S$ distinto dai vettori di $\mathcal{B}$, stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	V	F
$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di S	☐	☒
$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti	☒	☐
$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è un insieme di generatori di S	☐	☒
$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è una base di S	☐	☒
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti	☐	☒
$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è un insieme di generatori di S	☒	☐

22) Assegnato un sottospazio S di $\mathbf{R}^n$ di dimensione 3, stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	V	F
Comunque si prendano due vettori di S, essi sono lin. indipendenti.	☐	☒
Comunque si prendano due vettori di S, essi sono lin. dipendenti.	☐	☒
Esistono in S due vettori lin. indipendenti.	☒	☐
Comunque si prendano tre vettori di S, essi sono lin. indipendenti.	☐	☒
Comunque si prendano tre vettori di S, essi sono lin. dipendenti.	☐	☒
Esistono in S tre vettori lin. indipendenti.	☒	☐
Comunque si prendano quattro vettori di S, essi sono lin. indipendenti.	☐	☒
Comunque si prendano quattro vettori di S, essi sono lin. dipendenti.	☒	☐
Esistono in S quattro vettori lin. indipendenti.	☐	☒
Il vettore nullo di $\mathbf{R}^n$ può non appartenere ad S.	☐	☒
Preso un vettore $\underline{v}$ in S, il vettore $-\underline{v}$ deve appartenere ad S.	☒	☐

⊙ Cambiamenti di coordinate

23) Determinare la matrice M del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ (dunque l'inversa di M), essendo:
A) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$, $\quad \mathcal{B}' = \{v'_1 = (2,3), v'_2 = (3,-2)\}$;
B) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$, $\quad \mathcal{B}' = \{v'_1 = (1,-1), v'_2 = (0,1)\}$.
In entrambi i casi, dette (k_1, k_2) e (k'_1, k'_2) le coordinate di un vettore v rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, rispettivamente, scrivere le formule che esprimono (k'_1, k'_2) in funzione di (k_1, k_2).

Sol. A) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

Sol. B) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

⊙ Sistemi lineari

24) Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$a: \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ $\quad b: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$ $\quad c: \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$

$d: \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$ $\quad e: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$ $\quad f: \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$

$g: \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 1 \\ 3x + 3y - 15z = 2 \end{cases}$ $\quad h: \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$ $\quad i: \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 2 \\ 3x + 3y - 15z = 3 \end{cases}$

$\ell: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + z = 4 \end{cases}$ $\quad m: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$ $\quad n: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

Sol.

$a : \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)\right\}$ $b : \left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ $c : \left\{\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{4}, z\right) : z \in \mathbf{R}\right\}$

$d : \left\{\left(\frac{5}{4}z + 1, \frac{7}{4}z, z\right) : z \in \mathbf{R}\right\}$ $e : \emptyset$ $f : \emptyset$

$g : \emptyset$ $h : \{(y+1, y) : y \in \mathbf{R}\}$ $i : \{(-y + 5z + 1, y, z) : y, z \in \mathbf{R}\}$

$\ell : \{(1, 0, 0)\}$ $m : \left\{\left(1 - \frac{7}{5}z, \frac{1}{5}z, z\right) : z \in \mathbf{R}\right\}$ $n : \emptyset$

25) Per ciascuno dei precedenti sistemi lineari, descrivere le mutue posizioni delle rette (2 incognite) o dei piani (3 incognite) coinvolti.
Sol.
a, ℓ : tre piani con un punto in comune; b : tre rette di un fascio proprio;
c, m : tre piani di un fascio proprio; d : due piani incidenti;
e : tre rette che formano un triangolo;
f, n : tre piani che formano un prisma (una retta parallela a un piano);
g : due piani paralleli; h : tre rette uguali; i : due piani uguali.

26) Determinare i valori del parametro reale t per i quali il sistema $\begin{cases} x & +ty & = & 2 \\ x & +2ty & = & t \end{cases}$ ammette una sola soluzione, infinite soluzioni, nessuna soluzione.
Sol.
Il sistema ammette una sola soluzione per $t \neq 0$, non ammette mai infinite soluzioni, non ammette soluzione per $t = 0$.

27) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni
(il tipo del sistema è definito come il tipo della matrice incompleta; $\mathbf{0}$ è una colonna di zeri):

	V	F
Un sistema $n \times n$, $AX = B$, con $\det A = 0$, non ha soluzioni.	☐	☒
Un sistema $n \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $\det A = 0$, ha infinite soluzioni.	☒	☐
Un sistema 2×3, $AX = B$, con $rank(A) = 2$, ha ∞^1 soluzioni.	☒	☐
Un sistema $m \times n$, $AX = B$, con $n > m$, è necessariamente compatibile.	☐	☒
Un sistema $m \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $n > m$, ha infinite soluzioni.	☒	☐
Un sistema $m \times n$, $AX = \mathbf{0}$, con $n > m$, ha ∞^{n-m} soluzioni.	☐	☒
Se $\overline{X}$ è soluzione del sistema $AX = \mathbf{0}$, anche $k\overline{X}$ lo è , $\forall k \in \mathbf{R}$.	☒	☐
Se $\overline{X}$ è soluzione del sistema $AX = B$, con $B \neq \mathbf{0}$, anche $k\overline{X}$ lo è , $\forall k \in \mathbf{R}$.	☐	☒

28) Assegnate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, tale che risulti $AX = B$.
Sol.
$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

29) Quali delle seguenti applicazioni $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ sono lineari?

$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_3^2, x_1 + x_2 + x_3)$	☐
$L(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1 - x_2}{x_1}, x_1, x_3)$	☐
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{2}x_1 - x_2 + \pi x_3, (\log 3)x_1 - x_2, (\sin 3)x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3)$	☒
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1} + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3 + 1, x_1 + 3x_3)$	☐
$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, 0)$	☒

30) Determinare $L^{-1}(0,0,0)$, controimmagine del vettore nullo secondo l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, data da $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3)$. Dimostrare che $L^{-1}(0,0,0)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Determinarne una base e la dimensione.
Sol.
$L^{-1}(0,0,0) = \{(x, -x, 0) \colon x \in \mathbf{R}\}$, $\dim L^{-1}(0,0,0) = 1$, $\mathcal{B} = \{(1,-1,0)\}$.
Si tratta di un sottospazio perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, oppure perché è l'insieme dei vettori generati da un dato vettore.

31) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, definita da $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$. Se (k_1, k_2) sono le coordinate di un vettore $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, quali sono le coordinate di $L(\underline{v})$ rispetto a $\mathcal{B}$?
Sol.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

32) Date le applicazioni lineari $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\overline{L} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, definite da $L(x,y) = (x + 5y, 2x - y)$, $\overline{L}(x,y) = (3x - y, x + 2y)$, determinare le applicazioni composte $\overline{L}L$, $L\overline{L}$.
Sol.
$\overline{L}L(x,y) = (x + 16y, 5x + 3y)$
$L\overline{L}(x,y) = (8x + 9y, 5x - 4y)$

33) Data l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, definita da $L(x,y) = (2x - y, x + 2y)$, dimostrare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.
Sol.
$L^{-1}(x,y) = \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y\right)$

⊙ Autovalori ed autovettori

34) Determinare autovalori ed autovettori per le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dire per ognuna di esse se è diagonalizzabile ed in caso affermativo, calcolarne la forma diagonale.
Sol.
A è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autovettori: (t,t), $(3t, -t)$.
A' non è diagonalizzabile (la molteplicità geometrica dell'unico autovalore, 2, vale 1 (autovettori: $(t, -t)$).

35) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	V	F
Un autovalore è necessariamente diverso da zero.	☐	☒
Se un autovalore è zero, allora ammette un autovettore nullo.	☐	☒
Un autovettore è necessariamente diverso dal vettore nullo.	☒	☐
Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ è di secondo grado.	☐	☒
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice A sono gli autovettori di A.	☐	☒
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice A sono gli autovalori di A.	☒	☐
Gli autovettori di una matrice A sono tutte le soluzioni di $AX = \mathbf{0}$.	☐	☒

⊙ Geometria analitica piana

Nei prossimi esercizi è sottintesa l'assegnazione nel piano di un riferimento cartesiano di origine O e di versori degli assi $\vec{i}$, $\vec{j}$.

36) Assegnati i vettori $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, determinare il vettore $(\vec{v} \times \vec{w})\vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{u})\vec{w}$.

R. $-27\vec{i} + 37\vec{j}$.

37) Determinare il modulo del vettore $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

R. $\sqrt{13}$.

38) Determinare il versore $\vec{u}$ che ha la stessa direzione e verso opposto di $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

R. $\frac{1}{\sqrt{29}}(-2\vec{i} + 5\vec{j})$.

39) Determinare il coseno dell'angolo tra i vettori $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

R. $-\frac{13}{\sqrt{290}}$.

40) Determinare i vettori di modulo 2 paralleli a $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

R. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(6\vec{i} - 2\vec{j})$.

41) Determinare i versori $\vec{u}$ che formano un angolo $\theta = \arccos\frac{3}{5}$ con $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

R. $u_1 = i$, $u_2 = \frac{1}{25}(-7\vec{i} + 24\vec{j})$.

42) Determinare la distanza tra i punti $P_1(1, -1)$, $P_2(-4, 5)$.

R. $\sqrt{61}$.

43) Determinare l'area del triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 1)$.

R. $\frac{3}{2}$.

44) Determinare un'equazione (cartesiana) della retta passante per $P_1(2, 4)$, $P_2(-1, 3)$.

R. $x - 3y + 10 = 0$.

45) Determinare un'equazione cartesianana, ed equazioni parametriche, della retta passante per $P_1(3, 4)$, $P_2(3, -5)$.

R. $x = 3$; $(x, y) = (3, t)$.

46) Determinare l'equazione della retta passante per $P_0(1, 2)$, parallela alla retta passante per i punti $P_1(1, 3)$, $P_2(-1, 4)$.

$R.\ x + 2y - 5 = 0.$

47) Determinare l'equazione della retta passante per $P_0(1, 2)$, perpendicolare alla retta passante per i punti $P_1(1, 3)$, $P_2(-1, 4)$.

$R.\ 2x - y = 0.$

48) Determinare parametri direttori di $r:\ 2x + 3y - 1 = 0$.

$R.\ \ell = -3, m = 2.$

49) Determinare i versori paralleli a $r:\ 2x + 3y - 1 = 0$.

$R.\ \pm\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2).$

50) Determinare i versori perpendicolari a $r:\ 2x + 3y - 1 = 0$.

$R.\ \pm\frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3).$

51) Determinare il coseno dell'angolo ottuso formato dalle rette $r:\ x + y + 3 = 0$,
$r':\ 5x - 2y + 8 = 0$.

$R.\ -\frac{3}{\sqrt{58}}.$

52) Determinare la proiezione del vettore $\overrightarrow{v}(2, -1)$ sulla retta $r:\ 3x + 4y - 1 = 0$, orientata secondo il verso delle x crescenti.

$R.\ \frac{11}{5}.$

53) Determinare la distanza tra il punto $P_0(1, -3)$ e la retta $r:\ x + 2y - 1 = 0$.

$R.\ \frac{6}{\sqrt{5}}.$

54) Tra le rette parallele a $r:\ x + 2y = 0$, determinare quelle che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $P_0(1, -1)$.

$R.\ x + 2y + 6 = 0,\ x + 2y - 4 = 0.$

55) Assegnati i punti $A(0, 0)$ e $B(5, 12)$, determinare i punti C per i quali il triangolo ABC risulti isoscele e rettangolo in A.

$R.\ (-12, 5), (12, -5)$

56) Assegnato il triangolo di vertici $A(0, 0)$, $B(2, -4)$, $C(4, 6)$, determinare sulla mediana del lato BC i punti che distano $2\sqrt{5}$ da A.

$R.\ (3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

57) Nel piano, al variare di (a, b) in $\mathbf{R}^2 - \{0,0\}$, l'equazione $ax + by + 1 = 0$ rappresenta:

un fascio improprio di rette	☐	la totalità delle rette per l'origine	☐
un fascio proprio di rette	☐	nessuna delle precedenti	☒

58) Determinare l'equazione (canonica) della circonferenza passante per il punto $(2, 1)$ e tangente nell'origine la retta di equazione $2x - 9y = 0$.

R. $x^2 + y^2 + 2x - 9y = 0$

59) Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sull'asse x e passante per i punti $(2, 1)$ e $(3, \sqrt{2})$.

R. $x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$

60) Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, tangenti alla retta $r : 2x + y - 2 = 0$ nel punto $A(-1, 4)$.

R. $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 13 = 0$

⊙ Spazio euclideo

61) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $(2, 3, 0)$, $(3, 0, -2)$ e $(4, -3, 4)$.

R. $3x + y - 9 = 0$

62) Determinare il piano per l'origine parallelo alle rette $r : x - 2z = y + z - 1 = 0$ e $s : x - 3z + 2 = y + 2z + 4 = 0$.

R. $x + y - z = 0$

63) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $(0, 1, 2)$ e contenente la retta di equazioni $x - 2y + 4z = 2x + y - z + 1 = 0$.

R. $2x + y - z + 1 = 0$

64) Determinare il piano contenente la retta $r : x + y - 3 = x - 2y + z = 0$ e parallelo alla retta $s : x - z = y - 2z = 0$

R. $5x - 4y + 3z - 6 = 0$

65) Determinare il piano per l'origine che risulta parallelo alla retta $r : x + z + 1 = y - 3z = 0$ e perpendicolare al piano $v : 2x + y - 3z = 0$

R. $10x + y + 7z = 0$

66) Determinare il piano α contenente la retta $r : x - 5z = y - 2z = 0$ e perpendicolare al piano $\beta : x + y + z = 0$.

$R.\ x-4y+3z=0$

67) Determinare il piano α passante per i punti $(1,-1,2)$, $(2,3,-1)$ e perpendicolare al piano $\beta : x+y+z=0$.

$R.\ -7x+4y+3z+5=0$

68) Determinare la proiezione ortogonale della retta $r : x-3y+4z=2x+5y-z=0$ sul piano di equazione $3x-y+7z=0$.

$R.\ 37x+76y-5z=3x-y+7z=0$

69) Determinare la proiezione ortogonale del punto $(1,2,3)$ sul piano di equazione $3x-y+2z=0$.

$R.\ \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},2\right)$

70) Determinare il piano per il punto $(2,3,0)$ perpendicolare alla retta $r : x-2y=0, x-y+z=0$.

$R.\ 2x+y-z-7=0$

71) Individuare, tra le seguenti, le coppie di piani perpendicolari:

$\alpha : 2x+y-z+1=0;$	$\beta : x+y+3z-7=0$	☒
$\alpha : 2x+y-z+1=0;$	$\beta : 6x+3y-2z-7=0$	☐
$\alpha : 2x+y-z+1=0;$	$\beta : 5x-9y-1=0$	☐

72) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(1,0,2)$ e $B(1,3,0)$.

$R.\ x-1=2y+3z-6=0$
$(1,3t,2-2t)$

73) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta passante per i punti $(1,2,-1)$, $(3,2,0)$.

$R.\ y-2=x-2z-3=0$
$(1+2t,2,-1+t)$

74) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto $(-1,0,4)$ e parallela alla retta di equazioni parametriche $x=2t$, $y=-t$, $z=3t$.

$R.\ x+2y+1=3x-2z+11=0$

75) Tra le seguenti rette (date in equazioni parametriche o cartesiane) determinare quelle parallele al piano $\pi : 2x-y+z=0$:

$x-2z+1=y+z+3=0$	☐	$x=t+1, y=2t-4, z=0$	☒
$x=2t, y=-t+3, z=t-1$	☐	$x-z+2=y-3z=0$	☒
nessuna delle precedenti	☐		

76) Determinare parametri direttori delle rette parallele ai piani $\alpha : x+2y-z+1=0$ e $\beta : 2x-y+3z+4=0$.

$R.\ \ell = 1,\ m = -1,\ n = -1$

77) Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane
$x - y + z + 4 = x + y - 5z + 2 = 0$.

$R.\ (-3 + 2t, 1 + 3t, t)$

78) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto $(0, 2, 1)$ e parallela alla retta di equazioni $x + 3y + z + 1 = x - 2y - z = 0$.

$R.\ 2x + y - 2 = -5x + z - 1 = 0$

79) Determinare la retta per l'origine che risulti incidente le rette $r : x - 2z + 1 = y + 3z - 5 = 0$ e $s : x - 5z = y + z + 1 = 0$.

$R.\ 5x + y - 7z = x - 5z = 0.$

80) Determinare i valori del parametro t per i quali i seguenti piani si incontrano in esattamente un punto: $(4 - t)y - 3z + 1 = 0$, $x + 2y - z = 0$, $2y - (1 + t)z + 2 = 0$.

$R.\ t \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}.$

81) Individuare i valori del parametro t per i quali le rette: $x - 3z - 1 = y - 2z - 3 = 0$ e $s : x - 5z - 1 = y - 4z - t = 0$ sono complanari.

$R.\ t = 3.$

82) Determinare i valori di t per i quali il sistema $x + y + 2z - 2 = x + y + tz - 2 = tx + y + z - 1 = 0$ rappresenta una retta.

$R.\ t = 2$ (per $t = 1$ non esistono soluzioni).

83) Nello spazio euclideo l'equazione $x + y - 1 = 0$ rappresenta:

una retta del piano xy	☐	un piano contenente l'asse z	☐
un piano parallelo al piano xy	☐	un piano parallelo all'asse z	☒

84) Quali dei seguenti sistemi rappresentano una retta?

$x + 2y - 3z + 1 = 5x + 10y - 15z + 2 = 0$	☐
$2x - y + 3z + 5 = x + 3y - 5z = 3x + 2y - 2z + 5 = 0$	☒
$3x - y + z = x + 2y - z = 2x + 2y + 3z = 0$	☐

85) Assegnati i punti $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(t, -1, t - 1)$, determinare i valori del parametro reale t per i quali l'area del triangolo ABC vale $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

$R.\ t \in \{1, 2\}.$

86) Assegnate le rette $r : x - 2z + 1 = y + z + 3 = 0$ e $s : x + z = y - z - 2 = 0$, determinare $\cos \widehat{rs}$.

$R.\ \pm\frac{\sqrt{2}}{3}.$

87) Determinare i versori della retta $r : x + y - 3z + 2 = x - y + 2z = 0$.

$R.\ \pm\frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2).$

88) Determinare parametri direttori delle rette perpendicolari alle rette $r : x - 5z + 1 = y + z = 0$ e $s : x - 3z = y + 2z = 0$.

$R.\ (1, -2, -7).$

89) Determinare la distanza tra le rette $r : x + 2y - 2z = x + y = 0$ e $s : x - z = y - 2z - 2 = 0$.

$R.\ \frac{2}{\sqrt{5}}.$

90) Determinare la distanza tra le rette parallele $r : x - y = y - z = 0$ e $s : x - y + 5 = y - z + 5 = 0$.

$R.\ 5\sqrt{2}.$

91) Determinare la distanza del punto $P(1, -3, 3)$ dalla retta $r : x - 2z = y + 3z = 0$.

$R.\ \sqrt{5}.$

92) Determinare i piani contenenti la retta $r : x + y - 5z = x - y + 1 = 0$ e che abbiano distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dall'origine.

$$R.\quad \begin{array}{l} 4x - 2y - 5z + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 5z + 3 = 0 \end{array}.$$

93) Determinare i punti della retta $r : x - z - 1 = y - 2z + 1 = 0$ aventi distanza 1 dal piano $\pi : 3x + 2y - 6z = 0$.

$R.\ P = (7, 11, 6),\ Q = (-7, -17, -8).$

94) Sulla retta per $P(1, 1, 1)$ perpendicolare al piano $u : x + 2y - 3z = 0$ determinare i punti che distano 5 dal piano $v : x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$R.\ P = (2, 3, -2),\ Q = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{27}{11}, \frac{68}{11}\right).$

95) Dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(1, 1, 2)$, determinare i punti P della retta $r : x - z = y - 2z + 1 = 0$ per i quali il triangolo ABP abbia area $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$R.\ P = (1, 1, 1),\ Q = \left(\frac{3}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{3}{11}\right).$

96) Determinare sulla retta $r : x - z + 1 = y - 2z = 0$ i punti la cui distanza dall'origine sia 3.

$R.\ P = (-2,-2,-1),\ Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right).$

97) Dato il piano $\pi : 2x - 3y + 6z = 0$, determinare i piani aventi distanza 2 da π.

$$R.\ \begin{array}{l} 2x - 3y + 6z - 14 = 0 \\ 2x - 3y + 6z + 14 = 0 \end{array}.$$

98) Determinare l'equazione della sfera avente centro nell'origine e tangente al piano $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

$R.\ 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 4.$

99) Tra le sfere di centro il punto $(3,0,0)$, determinare quella tangente al piano di equazione $x + y + z = 0$.

$R.\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6 = 0.$

100) Determinare l'equazione della sfera avente centro sulla retta $r : x - y = y + z = 0$ e passante per i punti $(1,0,0)$ e $(1,0,2)$.

$R.\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z = 3.$

⊙ Vettori liberi

101) Mostrare con un esempio che l'operazione di prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.

$R.\ \vec{0} = (\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} \neq \vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = -\vec{j}.$

102) Assegnati i vettori liberi $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, determinare $(\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})\vec{w}$.

$R.\ -6\vec{i} - 2\vec{j} - 13\vec{k}.$

103) Assegnati i vettori liberi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determinare $[(\vec{v} \wedge \vec{w}) \times (\vec{w} \wedge \vec{v})]\vec{v}$.

$R.\ -18\vec{i} - 36\vec{j} - 18\vec{k}.$

104) Assegnati i vettori $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, determinare il vettore $\vec{w}$ parallelo a $\vec{u}$ tale che $\vec{w} \times \vec{v} = 5$.

$R.\ \vec{w} = 5\vec{j} + 5\vec{k}.$

105) Determinare i valori dei parametri s, t per cui il vettore $(s+1)\vec{i} + (s+t)\vec{j} + t\vec{k}$ è parallelo al vettore $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

$R.\ s = -\frac{3}{4},\ t = \frac{1}{2}.$