**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**

**Geometria**

***Diario delle lezioni (a.a. 2019 - 2020)***

**Mar. 24-09-2019:** Breve panoramica sul corso. Geometria e algebra lineare: due approcci matematici connessi. Geometria nel piano cartesiano. Sistemi lineari. Rette. Vettori geometrici. Vettori applicati. Vettore con punto iniziale e punto finale dati. Parallelismo e perpendicolarità. Operazioni con i vettori. Vettori numerici. Vettore direttore di una retta. Equazione cartesiana di una retta ottenuta mediante la proporzionalità tra vettori. Lunghezza di vettori e distanza tra punti. Versori.

**Mer. 25-09:** Simbolo Rn . Vettori numerici. Vettori **i** e **j** . Forma parametrica di una retta e problemi risolti mediante le equazioni parametriche. Distanza punto-retta (per ora senza dimo­strazione).

**Gio. 26-09:** Matrici, primi esempi. Determinante di una matrice quadrata di ordine 2. Propor­zionalità di vettori e relativo determinante nullo. Equazione cartesiana di una retta: scrittura mediante il determinante. Regola di Cramer per sistemi lineari di due equazioni in due incognite (da dimostrare).

**Ven. 27-09:** Definizione generale di matrice. Simbolo (aij) per il numero nella riga *i* e nella colonna *j* di una matrice A. Sistemi lineari e loro rappresentazione mediante la matrice incompleta e la completa. Prodotto di matrici. Risolvere un sistema lineare equivale a trovare la controimmagine del vettore dei termini noti secondo la funzione lineare definita dalla matrice incompleta. Esempi di equazioni, anche non lineari, interpretate come la ricerca di controimmagini opportune. Cenni sugli insiemi e sulle funzioni. Sistemi con parametro (rette coincidenti, equazioni proporzionali) e sistemi impossibili (caso delle rette parallele).

**Mar. 01-10:** Definizione formale di prodotto di matrici. Associatività. Trasposta di una matrice. Matrici simmetriche, matrice identità e suo ruolo nei prodotti di matrici. Somma di matrici. Primo esempio di riduzione a gradini (metodo di Gauss) per la risoluzione di un sistema lineare. Configu­razioni di tre rette nel piano, con le tre direzioni diverse, nel caso di un sistema impossibile.

**Mer. 02-10:** Vettori numerici, simbolo v. Matrici triangolari, matrici diagonali. Studio di sistemi lineari con l’obiettivo di eliminare equazioni superflue. “Combinazioni lineari” di equazioni di un sistema lineare ed eliminazione di equazioni superflue. Relazione tra un sistema senza soluzione e le righe della relativa matrice completa. Ulteriori esempi del metodo di riduzione a gradini, anche con tre incognite (senza interpretazione geometrica, per ora). Soluzione con parametro.

**Gio. 03-10:** Spazi vettoriali. Esempio dei polinomi di grado al più 4. Cenni a spazi vettoriali di matrici. Dipendenza lineare. Generatori e basi di uno spazio vettoriale. Esempi di basi in R3. Teorema del numero invariante dei vettori in una base (da dimostrare). Rappresentazione tridimensionale di vettori numerici di R3 .

**Ven. 04-10:** Esempi di vettori linearmente dipendenti o linearmente indipendenti. Definizione generale di base come insieme di generatori linearmente indipendenti. Base canonica di uno spazio Rn . Sottospazi di uno spazio vettoriale. Sottospazio generato da alcuni vettori (presto dimostreremo che esso è effettivamente uno spazio vettoriale).

**Mar. 08-10:** Le due proprietà di chiusura (rispetto alla somma e al prodotto con scalari) sono sufficienti per dimostrare che un insieme è un sottospazio (dim.). L’insieme generato da alcuni vettori dati è in effetti un “sottospazio” (dim.). Dimensione di uno spazio vettoriale (numero degli elementi di una sua base, se questo numero è finito). Generatori di un sottospazio, linearmente dipendenti (la dimensione si abbassa). Dettagli sulla riduzione a gradini: operazioni elementari e pivot. Teorema (da dimostrare in seguito): data una matrice, il numero di pivot ottenuto a seguito di una qualunque riduzione a gradini coincide con la dimensione del sottospazio generato dalle righe della matrice.

**Mer. 09-10:** Rango come numero di pivot di una qualunque riduzione a gradini. Teorema di Rouché-Capelli. Scelta dei parametri (le relative incognite non devono corrispondere ai pivot). Esercizi di approfondimento.

**Gio. 10-10:** Esercizi sui sottospazi. Sottospazio uguale all’intero spazio vettoriale. Metodo “1-0” e casi particolari in cui tale approccio non ha successo. Sistemi lineari omogenei. Simbolo “infinito alla *p*” Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo costituiscono un sottospazio (dimostrazione mediante il prodotto di matrici). Metodo “1-0” per la ricerca di una base dello spazio delle soluzioni.

**Ven. 11-10:** Dimostrazione del teorema sui pivot: il loro numero è la dimensione del sottospazio generato dalle righe della matrice iniziale. Costruzioni di matrici quadrate di rango massimo. Definizioni equivalenti di base: insiemi minimali di generatori o insiemi massimali di vettori linearmente indipendenti. Riduzione a scala per una matrice con valori dipendenti da un parametro (argomento da concludere): variabilità del rango in funzione del parametro.

**Mar. 15-10:** Analisi del rango di matrici e discussione di sistemi lineari mediante la riduzione a gradini. Interpretazione geometrica: intersezione di un fascio di rette con due rette fisse. Defini­zione di determinante per una matrice quadrata di ordine 3, primi cenni. Il determinante è definito in modo tale da annullarsi se le righe sono linearmente dipendenti (da dimostrare).

**Mer. 16-10:** Definizione generale di determinante e prime proprietà. Complementi algebrici. Rango definito come massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo (rango “per minori”); esso coincide col rango per pivot (lo dimostreremo). Teorema degli orlati (senza dimostrazione).

**Gio. 17-10:** Scambiando due righe il determinante cambia di segno (2° teorema di Laplace, dim. per due righe adiacenti e idea della dim. per due righe non adiacenti). Conseguenza: una matrice (quadrata) con due righe uguali ha determinante nullo. (Multi)Linearità del determinante. Da queste proprietà segue che una matrice con le righe linearmente dipendenti ha il determinante nullo. Vale anche l’implicazione inversa, dimostrata utilizzando la riduzione a gradini e l’invarianza della nullità o meno del determinante a seguito delle operazioni elementari – da approfondire nelle prossime lezioni. Esempio di applicazione del rango per minori e della regola di Cramer per un sistema con soluzione parametrica.

**Ven. 18-10:** Dimostrazione dell’equivalenza del rango per pivot e del rango per minori mediante l’invarianza della nullità o meno del determinante a seguito di operazioni elementari. Rango per colonne. Teorema di Binet, senza dimostrazione. Matrice inversa, primi esempi. Risoluzione di un sistema con matrice incompleta quadrata avente determinante non nullo, mediante l’inversa (equivale all’applicazione della formula di Cramer, da vedere). Una matrice che ha determinante nullo non ammette l’inversa (dimostrazione per assurdo col teorema di Binet).

**Mar. 22-10:** Definizione generale di matrice inversa. Il prodotto con la matrice iniziale dà effettivamente la matrice identità (dimostrazione, come approfondimento). Regola di Cramer, ripetizione del caso 2 per 2 con calcolo esplicito dell’inversa.

**Mer. 23-10:** Regola di Cramer generale. Calcolo di matrici inverse e approfondimenti sui sistemi lineari. Metodo di Sarrus e cenno alla definizione originale di determinante. Teorema di Rouché-Capelli nella versione col rango per colonne; un sistema è risolubile se e solo se la colonna dei termini noti appartiene al sottospazio generato dalle colonne della matrice incompleta (la soluzione del sistema, eventualmente parametrica, fornisce i coefficienti delle combinazioni lineari idonee).

**Gio. 24-10:** Revisione di argomenti trattati fino ad ora, con approfondimenti vari. Simbolo di infinito alla zero (i.e. esiste un’unica soluzione). Discussione di un sistema mediante il rango per minori. Relazione tra le soluzioni di un sistema e quelle del relativo sistema omogeneo (teorema con cenno della dimostrazione, mediante la distributività del prodotto di matrici). Giacitura (luogo delle soluzioni del relativo sistema omo­geneo). Modifica del termine noto e traslazione della relativa retta. Calcolo della matrice inversa mediante la doppia riduzione a gradini, con cenno della dimostrazione (le operazioni elementari sono codificate da opportune matrici che moltiplicano a sinistra la matrice iniziale).

**Ven. 25-10:** Approfondimenti ed esercizi su argomenti trattati fino ad ora. Coordinate e loro unicità. Sistemi lineari (scelta corretta del parametro). Proiezione ortogonale di un vettore su una retta, nel piano Oxy.

**Mar. 29-10:** Dimostrazione del teorema sulla cardinalità invariante delle basi di uno spazio vettoriale fissato (sintesi della dimostrazione nel caso della dimensione 3).

Nuovo argomento: geometria dello spazio. Sistema di riferimento tridimensionale. Punti e vettori nello spazio. Equazione cartesiana di un piano e forma esplicita. Funzioni di due variabili (caso della z come funzione di x, y). Piani speciali (mancano una o due incognite nella relativa equazione). I piani passanti per l’origine - e soltanto quelli - sono sottospazi.

**Mer. 30-10:** Equazioni parametriche di un piano. Decomposizione di un dato piano nel sottospazio (piano passante per l’origine, interpretando i punti come vettori) sommato al vettore “spinta”. Giacitura. Trasformazione da equazioni parametriche ad equazione cartesiana (assorbimento dei parametri). Scrittura di un’equazione cartesiana a partire da punti del piano e/o vettori generatori della giacitura (calcolo di un opportuno determinante).

**Gio. 31-10:** Equazione generale di un piano, ax+by+cz+d=0; calcolo delle a, b, c, d con alcune ipotesi iniziali (ad es. il passaggio per tre punti). Parallelismo tra un vettore libero e un piano. Ruolo della giacitura in relazione al parallelismo. Piani paralleli e piani incidenti (relazione con i ranghi delle matrici - incompleta e completa – del relativo sistema di due equazioni in tre incognite). Retta, come intersezione di due piani; analogia col caso bidimensionale (punto, come intersezione di due rette).

**Mar. 05-11:** Vettore direttore di una retta: corrisponde a un punto della relativa giacitura. Parallelismo tra retta e piano, nello spazio cartesiano: il relativo sistema ha ranghi diversi perché è insolubile - oppure si ha il parallelismo quando un vettore direttore della retta soddisfa l’equazione della giacitura del piano. Calcolo del vettore direttore mediante la formula (l,m,n) con idea della dimostrazione (approfondimento). Scelta di un punto su una data retta (fissare una variabile per poi trovare le altre due è a volte improduttivo, perché stiamo intersecando la retta con un piano specifico che potrebbe essere a priori anche parallelo alla retta). Scrittura delle equazioni cartesiane di una retta a partire da due punti di passaggio, imponendo la proporzionalità tra vettori opportuni. Metodo alternativo, col teorema degli orlati. Equazioni superflue di piani, al fine di definire una retta: fascio proprio di piani, primi esempi.

**Mer. 06-11:** Equazioni parametriche di una retta nello spazio. Passaggio ad equazioni cartesiane (assorbimento del parametro). Fasci di piani in un riferimento Oxyz e analogia con i fasci di rette in un riferimento Oxy. Ruolo del doppio parametro.

**Gio. 07-11:** Utilizzo di fasci di piani propri per la risoluzione di esercizi. Configurazioni di due rette nello spazio. Rette sghembe, rette complanari (coincidenti, incidenti, parallele). Ricono­scimento della configurazione mediante l’analisi dei ranghi delle matrici incompleta e completa (seguirà la dimostrazione). Esercizi vari su rette sghembe e fasci di piani.

**Ven. 08-11:** Dimostrazione della corrispondenza tra mutue posizioni di rette e ranghi del sistema associato. Fasci impropri di piani. Interpretazione geometrica di sistemi e di discussioni. Approfon­dimenti vari su rette e piani nello spazio, con molteplici tecniche risolutive per un dato esercizio.

**Mar. 12-11:** Modulo di un vettore tridimensionale (doppia applicazione del teorema di Pitagora). Nuovo argomento: prodotto scalare, definito nel piano Oxy o nello spazio Oxyz. Proiezione ortogonale di un vettore lungo un altro vettore: analisi di alcuni aspetti trigonometrici. Dimostra­zione della relazione tra proiezione ortogonale e prodotto scalare nel caso bidimensionale (il caso tridimensionale è lasciato come esercizio facoltativo di approfondimento). Formula per il coseno dell’angolo tra due vettori. Vettori ortogonali (prodotto scalare nullo). Coseno dell’angolo formato da due rette incidenti.

**Mer. 13-11:** Esercizi vari su rette, piani, prodotto scalare. (Il programma è temporaneamente rallentato per consentire la preparazione all’esonero di chimica, programmato per venerdì 15 novembre.)

**Gio. 14-11:** Il programma è rallentato in vista dell’esonero di chimica. Vettore perpendicolare (o *normale*) a un piano; è il vettore (a,b,c), o un suo multiplo, data l’equazione ax+by+cz+d=0. Infatti il prodotto scalare (a,b,c)×(x,y,z) è uguale ad ax+by+cz, dunque vale 0 per qualunque vettore della giacitura (attenzione: eliminare dunque la d!). Studio dell’angolo tra due piani o tra un piano e una retta. Grazie al vettore normale è più semplice calcolare il coseno dell’angolo formato da due piani o da un piano e una retta (in quest’ultimo caso la formula produce il seno dell’angolo).

**Ven. 15-11:** Esercizi su vari argomenti del programma svolto fino ad ora.

**Mar. 19-11:** Sintesi dei concetti geometrici legati al prodotto scalare. Angoli tra enti geometrici e calcolo del loro coseno. Nuovo argomento: distanze. Distanza tra rette parallele (utilizzo di un piano perpendicolare). Distanza tra un punto e un piano (analogia col caso bidimensionale della distanza tra un punto e una retta). Distanza tra un punto e una retta - nello spazio. Distanza minima tra due rette sghembe (utilizzo del piano contenente una delle due rette e parallelo all’altra).

**Mer. 20-11:** Rilevazione delle opinioni degli studenti. Esercitazione su argomenti vari del corso.

**Gio. 21-11:** Ulteriori esempi di applicazioni del prodotto scalare in dimensione 3 e delle nozioni ad esso collegate. Piano perpendicolare a una data retta e passante per un dato punto, formula compatta. Retta (incidente) perpendicolare a due rette sghembe (intersezione di piani opportuni). Nuovo argomento: basi ortogonali, proiezioni e componenti ortogonali. Proiezione ortogonale vettoriale, a partire dalla proiezione ortogonale numerica. Coefficienti di Fourier. Ortogonaliz­zazione di un vettore rispetto a un altro (procedimento di Gram-Schmidt, primo livello). Prodotto scalare generalizzato a qualunque spazio Rn , primi cenni. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio di dimensione 2.

**Ven. 22-11:** Prodotto scalare in spazi Rn . Proiezione ortogonale e componente ortogonale nel caso generale (definizione della proiezione come somma delle proiezioni sui singoli vettori di una data base ortogonale, mediante i coefficienti di Fourier). Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, caso generale con dimostra­zione della validità per qualunque numero di generatori lin. indipendenti di un dato sottospazio di Rn. Ricerca di vettori esterni a un dato sottospazio (estensione di una base) e successiva ortogonalizzazione.

**Mar. 26-11:** Sottospazio S┴ , “ortogonale”, formato dai vettori ortogonali ai vettori di un dato sottospazio S di Rn (ancora da dimostrare: un tale insieme è in effetti un sottospazio). Equazioni del sottospazio ortogonale, dati i generatori del sottospazio S. Esempi vari, in dimensione 2, 3, 4. Prodotto vettoriale; definizione geometrica e calcolo mediante la formula (l,m,n) (ancora da dimo­strare in sintesi). Il vettore (l,m,n), data una retta, è il prodotto vettoriale dei due vettori normali ai piani che generano la retta.

**Mer. 27-11:** Rilevazione delle opinioni degli studenti, secondo evento. Decomposizione di un vettore in proiezione e componente ortogonale (da dimostrare: unicità). Ruoli reciproci di un dato sottospazio e del suo sottospazio ortogonale in uno spazio Rn fissato. Esercizi vari sulle proiezioni ortogonali.

**Gio. 28-11:** Intervento programmato dei rappresentanti degli studenti con suggerimenti riguardanti l’offerta formativa e altri aspetti del corso di laurea.

Il “sottospazio ortogonale” è in effetti un sottospazio (dimostrazione delle proprietà di chiusura o mediante i sistemi omogenei). Unicità della scrittura di un dato vettore come proiezione e componente ortogonale, fissato un sottospazio. Dato un sottospazio S di Rn , lo spazio totale Rn viene ripartito come “somma diretta” di S e del sottospazio ortogonale S┴ . Somma diretta S⊕T di due rette (giaciture) non necessariamente ortogonali, nel piano. Calcolo delle coordinate mediante i coefficienti di Fourier, nel caso di vettori ortogonali. Scrittura di equazioni cartesiane di un sottospazio (generalizzazione delle equazioni di rette e piani, mediante il rango).

**Ven. 29-11:** Esercizi e approfondimenti sui sottospazi. Equazioni parametriche di un sottospazio e passaggio ad equazioni cartesiane. Interse­zione di sottospazi. Somma di sottospazi e introduzione alla formula di Grassmann.

**Mar. 03-12:** Anticipo del nuovo argomento per facilitare l’apprendimento (la conclusione del vecchio argomento è posticipata a domani): applicazioni lineari e autovettori. Esempi di applica­zioni lineari da R1 a R1e da R2 a R2 . Matrice ed equazioni di un’applicazione lineare (primi esempi). Rappresen­tazione geometrica. Autovettori e autovalori. Interpretazione geometrica di autovettori in R2 . Utilità degli auto vettori per semplificare la descrizione di una funzione. Matrice diagonale corrispondente al nuovo riferimento diretto secondo gli autovettori. Metodo per il calcolo di autovalori e autovettori. Equazione caratteristica.

**Mer. 04-12:** Conclusione del vecchio argomento: ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi. Somma di sottospazi e rango della relativa matrice dei generatori. Formula di Grassmann (idea della dimostrazione, senza dimostrare l’indipen­denza lineare dei generatori della somma). Area di trian­goli calcolata mediante il prodotto vettoriale. Prodotto misto e cenno al volume di un parallele­pipedo.

**Gio. 05-12:** A causa della mancanza di riscaldamento in aula (ore 10.00), credo per un disguido tecnico, diversi studenti risultano assenti e gli studenti presenti sono comunque in condizioni disagevoli. La lezione è fortemente rallentata e gli argomenti principali da trattare vengono postici­pati. Esercizi sugli autovettori per matrici di ordine 2. Caso dell’auto­valore nullo. Matrici di applicazioni lineari senza autovettori (caso delle rotazioni con possibile cambio di scala).

**Ven. 06-12:** Matrice di un’applicazione lineare rispetto a due basi assegnate nel dominio e nel codominio rispettivamente. Esempio della derivata di polinomi e altri esempi di applicazioni lineari con successiva costruzione della matrice. Immagine di un’applicazione lineare; essa è generata dalle colonne della matrice, intese ovviamente come coordinate rispetto alla base scelta nel codominio. Il rango è la dimensione dell’immagine. La suriettività dunque sussiste quando il rango è uguale alla dimen­sione del codominio (numero di righe della matrice).

**Mar. 10-12:** Controimmagine di un elemento del codominio e corrispondente sistema lineare, data un’applicazione lineare definita mediante una matrice con basi fissate. Nucleo di un’applicazione lineare. Iniettività e relazione col nucleo (il nucleo consiste del solo vettore nullo se e solo se la funzione è iniettiva; dimostrazione mediante il rango del relativo sistema omogeneo – seguirà una dimostrazione generale, formale). Controimmagini in relazione al nucleo – teorema da approfon­dire. Esempi di applicazioni lineari non iniettive o non suriettive. Interpretazione geometrica. Cenni al concetto di isomorfismo (ad es. un sottospazio di dim. 2 in R3 è isomorfo a R2 mediante un’opportuna applicazione lineare). Composizione di applicazioni lineari e corrispondente prodotto di matrici. Applicazioni invertibili: il rango della matrice è uguale alle dimensioni del dominio e del codominio; la matrice dell’applicazione inversa è proprio l’inversa della matrice perché il prodotto dà la matrice identità.

**Mer. 11-12:** Dimensione del nucleo e dimensione dell’immagine. Iniettività e nucleo: dimostra­zione valida per qualunque spazio vettoriale. Controim­magini in relazione al nucleo: approfon­dimento. Calcolo di autovettori per matrici di ordine 3. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica.

**Gio. 12-12:** Diagonalizzazione di una matrice quadrata mediante una base di autovettori (se esiste una tale base). Interpretazione della diagonaliz­zazione come cambiamento di coordinate, data un’applicazione lineare definita mediante la matrice rispetto alla medesima base, nel dominio e nel codominio. Matrici del cambiamento di coordinate. Diagonaliz­zazione di una matrice simmetrica e teorema spettrale.

**Mar. 17-12:** Coniche. Definizione mediante le sezioni di un cono. Definizione mediante i fuochi (ellisse e iperbole) e mediante fuoco e direttrice. Metodo della diagonalizzazione al fine di trasfor­mare un polinomio in due variabili di secondo grado nell’equazione di una conica in forma canonica (non consideriamo le traslazioni ma solo le rota­zioni): caso dell’ellisse.

**Mer. 18-12:** Esercizi su proiezioni ortogonali, autovettori, coniche. Riduzione in forma canonica di una parabola (in questo caso uno dei due autovalori è nullo).

**Gio. 19-12:** Ultimi argomenti, in estrema sintesi: definizione di parabola e confronto con le definizioni di ellisse e iperbole, con particolare riguardo all’eccentricità. Segno della matrice relativa ai termini di grado 2 della conica (dipende dai due autovalori, se concordi, discordi, o se uno è nullo). Trasformazione di equazioni (es. direttrice o asintoto) dal nuovo al vecchio riferi­mento, mediante la legge inversa. Geometria proiettiva (in questo modello geometrico, i tre tipi di conica si riducono a un unico tipo), cenno. Sfera (cenno). Quadriche (cenno): sono il corrispettivo delle coniche, con una variabile in più (superfici nello spazio). Le 5 quadriche non degeneri. Superfici iperboliche e superfici ellittiche, cenno. Matrice estesa, di ordine 3, relativa a un dato polinomio di grado 2 in 2 variabili. Metodo del determinante invariante per ottenere la forma canonica di un’ellisse o di un’iperbole (per la parabola: approf.). Vecchio argomento da concludere: dimostrazione della proprietà classica del prodotto vettoriale (formula di (l,m,n) ), presupponendo la distributività. Termine del corso.

**………………………………………………………………………………..**

Esercizi assegnati e argomenti del testo consigliato:

(Le parti in grassetto sono le più recenti. *In genere le assegnazioni si spingono fino a tre o quattro lezioni successive*.)

*• Esercizi del dott. Vietri:*

27-33, 75, 76, 77 (3°,4°), 80 (1°, senza utilizzare il determinante), 83. 3 (solo i prodotti), 9 (approfondimento). 17, 18 (provare a risolvere entrambi gli esercizi senza utilizzare il “determinante” o il “rango” ma solo con la nozione di dipendenza lineare), 19 - 26 (il 23 può essere affrontato se già si conoscono le derivate, altrimenti posticipare), 74. 3 (rango), 10 – 16 (con la riduzione a gradini). 4 – 8, 74 – 86 (gradualmente anche con il metodo di Cramer e utilizzando il rango per minori in alternativa al rango per pivot). 1 – 3. 35 – 40, poi 41 – 51. Rivedere gli es. del cap. 5 sui sistemi, interpretando geometricamente i sistemi e le discussioni in tre incognite. 34, 52 – 73. Capitolo 7: esercizi relativi alla proiezione ortogonale e al metodo di Gram-Schmidt. Gradualmente: tutti i restanti esercizi del cap. 7. 94, 95, 101 (escludere le domande finali), 102 – 108, 111, poi i restanti esercizi del cap. 6. **Esercizi sulle coniche, cap. 8, dal 136 al 151.**

*• Esercizi del prof. Del Fra:*

24 (b, e, h), 25, 26, 37, 38, 40, 42-50, 52 - 57. 14 (non il “rango”), 15; successivamente 16 - 18. 19 - 22, 24 (tutto). 11 (rango), 12, 14 (rango). 11 (determinante), 27, 28. 13. 61, 80, poi 62 – 64, infine 72 – 79 e 81 – 84. Rivedere il 24 e il 25 nei casi con tre incognite (interpretazione geometrica). 36, 39, 41, 51, 65 – 71, 85 – 97, 104, 105 (vecchio argomento). 101 – 103. 9, 10, 29 – 35. **58 - 60, 98 - 100.**

*• Esercizi della prof.ssa Carrara, sulle coniche:*

**Questi esercizi possono essere ormai risolti, gradualmente, utilizzando le nozioni dell’ultima parte del corso (18-12-2019). Alcune parti non sono state trattate nel corso e devono quindi essere considerate approfondimenti facolta­tivi.**

*• Libro di testo (compresi gli esercizi nei relativi paragrafi):*

Cap. 1. 2.1, 2.2. 2.3; successivamente 2.4, 2.5, 2.10. Completare il cap. 2. 3.1, 3.2. Completare gradualmente il cap. 3. 4.1 - 4.3, poi 4.4 – 4.9. Completare il cap. 4. In ordine: 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e gradualmente tutto il cap. 5 (la dimostrazione del par. 5.3 è un approfondimento facoltativo). Cap. 6. **Cap. 7. Cap. 8 (per nozioni basilari e approfondimenti).**