**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**

**Geometria**

***Diario delle lezioni (a.a. 2023 - 2024)***

**Mar. 26-09-2023 (aula 3, 15.00 – 17.00):**

(per problemi tecnici mancano purtroppo le relative slides)

Introduzione al corso di geometria. Informazioni generali. Struttura dell’esame conclusivo e ruolo fondamentale degli esercizi impartiti durante il corso.

Connessione tra geometria e algebra. Equazioni lineari (di grado 1) e relazione con gli enti geometrici che esse rappresentano (rette e piani, cenno). In molti casi il calcolo algebrico consente di risolvere problemi di tipo geometrico. Viceversa, l’interpretazione geometrica può illuminare situazioni difficili in algebra.

Geometria in un riferimento Oxy. Vettori geometrici e vettori numerici. Modulo di un vettore. Somma e differenza di vettori. Moltiplicazione di un vettore per un numero (scalare). Vettore direttore di una retta. Versori. Operazioni che escono dall’insieme assegnato (esempio: somma di due versori in generale). Versori **i** e **j** .

**Mer. 27-09 (17.00 – 19.00):**

“Matrici”. “Determinante” di una matrice 2 × 2 (2 righe e 2 colonne). Il determinante vale zero nel caso di righe o colonne proporzionali. Matrice associata a un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Regola di Cramer per trovare l’intersezione di due rette non parallele (da dimostrare nelle prossime lezioni). Retta passante per due punti assegnati. Costruzione dell’equazione cartesiana utilizzando il determinante. Equazioni parametriche di una retta. Passaggio alla forma cartesiana mediante assorbimento del parametro. Formula (-b,a) per un vettore direttore della retta di equazione ax+by+c=0. Attenzione: il vettore (a,b) è invece perpendicolare alla retta data (rotazione di 90 gradi del relativo triangolo rettangolo delle componenti).

**Gio. 28-09 (10.00 – 12.00):**

Vettori numerici con più di due componenti. Simbolo Rn (ad es. R3 ) per vettori con n componenti. Combinazioni lineari di vettori numerici. Combinazioni lineari di vettori geometrici. Combinazioni lineari di equazioni. Equazioni eliminabili (“inutili”) - sono combinazioni lineari di altre equazioni presenti nel sistema. Ricerca dei coefficienti di combinazioni lineari mediante la risoluzione di un sistema opportuno. Metodo di Gauss (riduzione a gradini) per eliminare equazioni inutili così da arrivare a un sistema essenziale, facilmente risolubile oppure chiaramente senza soluzione (primi esempi). Pivot. Presenza di un parametro in un sistema di due equazioni in tre incognite (primo esempio, da approfondire).

**Ven. 29-09 (08.00 – 10.00):**

Approfondimenti, esempi, esercizi sugli argomenti trattati. Retta passante per un punto e parallela a un dato vettore (il determinante di un’idonea matrice viene posto uguale a zero). Giacitura di una retta. Fasci propri di rette e profonda relazione con le combinazioni lineari di equazioni. Ruolo del doppio parametro in confronto al parametro singolo. Discussione di un sistema mediante un approccio geometrico. Cenno alla risoluzione mediante la riduzione a gradini.

**Mar. 03-10:**

(per problemi tecnici mancano purtroppo anche oggi le relative slides)

Operazioni elementari e loro reversibilità. La reversibilità rende queste operazioni idonee per la trasformazione di un sistema in uno più semplice ma equivalente a quello iniziale. Rango per pivot. Il rango per pivot non dipende dalla sequenza di operazioni elementari svolte (teorema importante che dimostreremo). Risoluzione di un sistema con scelta opportuna dei parametri liberi (essi corrispondono alle colonne non occupate dai pivot). Matrice incompleta e matrice completa. Un sistema non ammette soluzione precisamente quando il rango della matrice incompleta non è uguale a quello della completa (è minore). Introduzione alla geometria dello spazio. Punti e vettori geometrici tridimensionali. Soluzione con un parametro, per un sistema con tre incognite, e analogia con la retta nella geometria bidimensionale; nel caso presente otteniamo una retta nello spazio tridimensionale ma i concetti di spinta e giacitura rimangono invariati.

**Mer. 04-10:**

La regola di Cramer può essere ottenuta col metodo della sostituzione, facilmente, almeno per il caso di due incognite (sintesi dei passaggi algebrici necessari). Sistemi omogenei; la soluzione di un sistema omogeneo esiste in ogni caso, è quella nulla, ma possono esistere ulteriori soluzioni, infinite – dipende dal rango. Traslazione della soluzione nel caso di alterazione dei termini noti, cenno. Rappresentazione astratta di soluzioni in spazi Rn con n>3, cenni. Una “retta” può essere immaginata anche in dimensione maggiore di 3, senza visualizzarla ma generalizzando e preservando concetti come la direzione, la proporzionalità, l’intersezione, ecc. Studio del rango di una matrice con alcuni valori parametrici mediante la riduzione a gradini. Lo studio diventa più articolato se la matrice rappresenta un sistema; in questo caso occorre infatti studiare e confrontare i ranghi delle matrici incompleta e completa. Approfondimenti vari sulla riduzione a gradini.

**Gio. 05-10:**

Lo studio di sistemi lineari e la riduzione a gradini conducono al nuovo argomento. Spazi vettoriali. Esempi: spazi Rn , polinomi, vettori geometrici. Sottospazio generato da alcuni vettori. Vettori linearmente dipendenti. Basi. Cenno al determinate come strumento per studiare la dipendenza lineare.

**Ven. 06-10:**

Spazi vettoriali e sottospazi. Chiusura rispetto alle operazioni di somma e di prodotto con scalari, in un sottospazio. Dipendenza e indipendenza lineare. Definizioni equivalenti di base (insieme di generatori linearmente indipendenti, insieme *minimale* di generatori, quindi non se ne può *escludere* alcuno, insieme *massimale* di vettori linearmente indipendenti, quindi non se ne può *aggiungere* alcuno). Anche le matrici, ad esempio quelle 2 per 2, formano uno spazio vettoriale. Esempi di basi in spazi vettoriali. Cenno al numero, invariante, di vettori che costituiscono una base di un dato spazio vettoriale (teorema fondamentale da dimostrare). Metodo “1-0” per costruire vettori gene­ratori (non è detto che siano anche linearmente indipendenti!) in uno spazio vettoriale definito mediante parametri.

**Mar. 10-10:**

Approfondimenti su spazi vettoriali, sottospazi, basi. Il sottospazio generato da alcuni vettori è effettivamente chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto con un numero reale, quindi è un sottospazio secondo la definizione gene­rale. “Dimensione” di uno spazio vettoriale (numero, invariante, di vettori che costituiscono una base qualunque). Base canonica e dimensione di Rn , uguale a *n*, per ogni numero naturale *n* fissato. Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Ricerca delle coordinate rispetto a una base non canonica di R3 . Esempi di insiemi di generatori linearmente dipendenti in spazi Rn *.* Eliminazione di generatori superflui.

**Mer. 11-10:**

Esercizi vari sui sottospazi e sulle basi. Verifica della chiusura rispetto alla somma e rispetto al prodotto con uno scalare, data la rappresentazione di un insieme mediante vettori con parametri. Metodo 1-0 utilizzato per dimostrare che un dato sottoinsieme di uno spazio Rn è il sottospazio generato da alcuni vettori. Metodi vari per dimostrare che un insieme non è un sottospazio: mancanza dello zero, mancata chiusura rispetto alla somma, ecc. Rappresentazione geometrica di un sottospazio bidimensionale di R3 : abbiamo un piano passante per l’origine, immerso nello spazio tridimen­sionale. L’insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo con *n* incognite è un sottospazio di Rn (esempio con 3 incognite da generalizzare nella prossima lezione).

**Gio. 12-10:**

Il metodo 1-0 è certamente utile per dimostrare che un dato insieme è un sottospazio, ma potrebbe fornire generatori linearmente dipendenti, non costituenti ancora una base.

Sistemi lineari omogenei e sottospazi. Rappresentazione di un sistema siffatto mediante lettere a doppi indici. Teorema: le soluzioni di un tale sistema formano un sottospazio del relativo spazio Rn (n incognite), dimostrazione diretta; presto dimostreremo nuovamente il teorema in modo più sintetico, mediante il prodotto di matrici, ma i calcoli sottintesi saranno simili.

Teorema della cardinalità delle basi, o teorema della dimensione (le basi di un fissato spazio vettoriale hanno tutte lo stesso numero – cardinalità – di elementi; si tratta della cosiddetta dimensione): dimostrazione (approfondimento). Metodo della dimostrazione per assurdo, struttura generale del ragionamento.

**Ven. 13-10:**

Spazi vettoriali costituiti da matrici. Sottospazi e basi di matrici. Scrittura a doppio indice (come per i sistemi omogenei) per rappresentare una matrice. Matrici diagonali, matrici triangolari. Altre classi di matrici. Matrice identità.

Prodotto di matrici. Rappresentazione della parte omogenea di un sistema mediante il prodotto della matrice incompleta per la colonna delle incognite. Esempi di prodotti e ruolo neutro della matrice identità. Il prodotto non è in generale commutativo e in molti casi non è neanche possibile scambiare le matrici per poi moltiplicarle.

Matrice inversa, primi esempi.

**Mar. 17-10:**

Dimostrazione conclusiva della presente parte del corso: teorema di invarianza del numero di pivot; più in dettaglio, le riduzioni a gradini di una data matrice portano al medesimo numero di gradini, a prescindere dal tipo e dal numero di operazioni elementari effettuate.

Teorema di Rouché-Capelli nella versione del rango per pivot. Simbolo di “infinito alla c” dove c è il numero di incognite meno il rango.

Spazi vettoriali costituiti da polinomi; basi e coordinate in questi spazi.

**Mer. 18-10:**

Esercizi di riepilogo. Versore **k**. Coordinate nello spazio dei vettori geometrici tridimensionali. Le coor­dinate di un vettore rispetto a una data base sono uniche (esercizio di approfondimento). Il concetto di coordinata non ha senso in presenza di generatori linearmente dipendenti (diverse, anzi infinite scelte di coordinate corrispondono allo stesso vettore da generare). Sistemi omogenei e sottospazi delle soluzioni: nuova dimostrazione mediante la distributività del prodotto di matrici (caso della somma).

**Gio. 19-10:**

Conclusa la panoramica sui sottospazi e le basi, passiamo a un nuovo argomento. Determinante di una matrice, definizione generale, ricorsiva, mediante i cosiddetti complementi algebrici (teorema di Laplace, primo). Esempi di calcolo di determinanti nel caso dell’ordine 3. Teorema fondamen­tale: il determinante vale zero se e solo se le righe (o le colonne) della matrice in esame sono linearmente dipendenti. Ci avviamo verso la sua dimostrazione studiando varie proprietà che concorreranno al ragionamento finale. Una matrice con due righe o due colonne uguali ha determi­nante nullo. Scambiando due righe (o colonne), il determinante cambia di segno (secondo teorema di Laplace). Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

**Ven. 20-10:**

Proprietà del determinante in relazione alla somma di vettori in una data riga e al prodotto di una riga con uno scalare. Teorema fondamentale, dimostrazione della prima implicazione: se una riga è combinazione lineare delle altre, il determinante vale zero. Reazione del determinante a seguito dell’applicazione di un’operazione elementare: in particolare, se esso era nullo resta nullo, se non lo era resta non nullo. Ricostruzione del determinante iniziale sottoposto ad operazioni elementari, registrando i vari fattori che lo hanno modificato durante la riduzione a gradini. Dimostrazione, ora, dell’implicazione inversa - versione “contronominale”: se nessuna riga è combinazione lineare delle altre (quindi se le righe sono linearmente indipendenti), il determinante non può valere zero. La dimostrazione è basata sulla riduzione a gradini, processo che si conclude con una matrice trian­golare superiore avente rango massimo (numero massimo di pivot) e quindi con determinante non nullo, come prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

**Mar. 24-10:**

Calcolo di un determinante nel caso di una matrice 4×4. Relazione tra il determinante e il rango di una matrice qualunque, non necessariamente quadrata. Sottomatrici. Minori (determinanti di sottomatrici quadrate). Rango come massimo ordine n di una sottomatrice n×n che abbia deter­minante non nullo. Questo rango è effettivamente equivalente alle altre nozioni già note, di rango. Infatti (sintesi della dimostrazione) il processo di riduzione a gradini non intacca la nullità o meno dei minori, quindi il massimo ordine del minore non nullo si trasmette dall’inizio alla fine della riduzione a gradini.

**Mer. 25-10:**

Calcolo di un determinante 4×4 con una preventiva semplificazione della matrice mediante un’operazione elementare di Gauss.

Metodo di Sarrus e generalizzazione al caso n×n (approfondimento) mediante il conteggio delle discese per ognuno degli n! (fattoriale) prodotti. Il primo teorema di Laplace è appunto un “teorema” perché Laplace ha riformulato efficacemente la regola di Sarrus dimostrando l’equiva­lenza dei due metodi di calcolo; la regola di Sarrus generale costituisce in realtà la prima, basilare definizione di determinante.

Metodo di dimostrazione per induzione, idea generale ed esempi vari: calcolo del numero di sottoinsiemi di un insieme finito di cui è nota la cardinalità; calcolo del determinante di una matrice triangolare superiore (prodotto degli elementi sulla diagonale principale); approfondimento: somma dei primi n numeri dispari.

**Gio. 26-10:**

Matrice trasposta; il suo determinante è uguale a quello della matrice iniziale (dimostrazione per induzione). Vettori trasposti e scrittura di un sistema in forma matriciale.

Teorema di Binet (senza dimostrazione). Esempio della matrice cosiddetta “inversa” (il suo determinante è l’inverso della matrice iniziale). Studieremo l’inversa nelle prossime lezioni.

Studio del rango per minori e teorema degli orlati. Esempi di applicazione del teorema.

**Ven. 27-10:**

Analisi del rango di una matrice al variare di un parametro, coi nuovi strumenti del rango per minori e del teorema degli orlati. Analisi - un po’ più articolata - di un sistema avente la medesima matrice completa, anche con l’ausilio del teorema di Rouché-Capelli.

Matrice inversa di una matrice n×n. Esempio di utilizzo della matrice inversa al fine di risolvere un sistema lineare; il caso 1×1 è il prototipo elementare studiato già nella scuola media inferiore e ora siamo passati al caso 2×2 per poi trattare il caso generale; esso è in realtà equivalente alla formula di Cramer (lo vedremo). Formula per il calcolo dell’inversa mediante i complementi algebrici. Matrice aggiunta.

**Mar. 31-10:**

Approfondimenti vari sulla matrice inversa. Il teorema di Binet implica - dopo un breve ragionamento - che una matrice con determinante nullo non ammette inversa (a prescindere quindi dal metodo tentato, al fine di calcolarla).

Interpretazione delle operazioni elementari come matrici che moltiplicano da sinistra la matrice da trattare. Calcolo conseguente della matrice inversa mediante la doppia riduzione a gradini (metodo di Gauss-Jordan).

**Gio. 02-11:**

Approfondimenti sulla matrice inversa. Dimostrazione della formula per la matrice inversa; in particolare interviene il primo teorema di Laplace applicato a una matrice artificiale. Interruzione e insuccesso del metodo di Gauss-Jordan in presenza di una matrice con determinante nullo. Commu­tatività della matrice inversa rispetto al prodotto.

Nuovo argomento, centrale: geometria dello spazio. Funzioni di due variabili; rappresenta­zione in un riferimento spaziale: il dominio è il piano xy, il codominio è l’asse z. Otteniamo, come grafico, una superficie. Essa è un piano se la funzione è del tipo z=px+qy (nota: eventualmente con un termine noto aggiunto).

*Perché è importante studiare i piani nello spazio, strutture così elementari, così poco versatili rispetto a superfici complicate ma realistiche e adattabili a svariati problemi? Uno dei motivi: i metodi dell’analisi (limiti, derivate, ecc.) consentono di studiare “al microscopio” le superfici, concen­trandosi su un piccola parte che può essere quindi interpretata come una porzione di piano. In quel momento entrano in gioco le tecniche di algebra lineare (sistemi lineari, combinazioni lineari, rango, ecc.). Come la retta tangente approssima una data curva (grafico di una funzione da R1 a R1), così un piano approssima una superficie (grafico di una funzione da R2 a R1) ed è possibile poi passare a dimensioni maggiori sempre col supporto dell’algebra lineare.*

**Ven. 03-11:**

Costruzione di vettori tridimensionali a partire da coppie ordinate di punti (estremi). Esempi di rappresentazione geometrica in un riferimento Oxyz. Piani nello spazio. Un’equa­zione in tre incognite, lineare e omogenea rappresenta un piano passante per l’origine: esempio esplicito, 2x + 5y – z = 0 . I generatori del relativo sottospazio vengono interpretati come vettori generatori del piano vettoriale e anche come punti (i vettori sono infatti applicati nell’ori­gine, questo è un caso eccezionale in cui vettori e punti sono rappresentati dalla stessa tripla di numeri). Traslazione di un piano (in presenza di termine noto non nullo), esempio: 2x + 5y – z + 3 = 0. Se il piano non passa per l’origine, i suoi punti non possono più essere interpretati come vettori paralleli al piano. Equazioni parametriche di un piano.

Piano passante per tre punti: metodo del determinante, metodo dell’assorbimento dei parametri, metodo dell’equazione generale ax+by+cz+d=0. Analogie con la retta passante per due punti nella geometria bidimensionale, in un riferimento Oxy.

**Mar. 07-11:**

Equazione generale di un piano; sottospazio (giacitura) relativo a un piano. Ricerca di una base di vettori paralleli a un dato piano (generatori della giacitura). Parallelismo di un vettore rispetto a un piano. Calcolo di una base per la giacitura. Posizioni reciproche di due piani e analogia con le posizioni di due rette in un riferimento bidimensionale Oxy. Intersezione di piani. Due equazioni cartesiane determinano una retta se il sistema è risolubile ed ha ranghi uguali a 2.

**Mer. 08-11 (15.00 – 17.00):**

Le tre posizioni reciproche di due piani nello spazio corrispondono chiaramente a tre diverse conclusioni della riduzione a gradini. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio. Calcolo di un vettore direttore mediante la classica formula dei tre minori 2×2 (con dimostrazione per verifica diretta o con determinanti di matrici ad hoc, artificiali) o mediante la ricerca di soluzioni nel relativo sistema omogeneo (questo secondo approccio è certamente più naturale anche se in diversi casi pro­babilmente più lungo). Interpretazione geome­trica di sistemi lineari in tre incognite come interse­zioni tra opportuni piani o rette.

**Gio. 09-11:**

Approfondimenti ed esercizi vari su rette e piani nello spazio. Cenno al “prodotto vettoriale” in relazione alla formula del vettore direttore. Posizioni reciproche di due rette. Rette sghembe. Paral­lelismo tra retta e piano: discussione con un piano variabile. Fasci propri di piani.

**Ven. 10-11:**

Approfondimenti sui fasci propri di piani e relativi esercizi. Utilizzo del doppio parametro e piccolo rischio nell’adottare un unico parametro, in analogia al fascio proprio di rette in un riferimento piano Oxy. Risoluzione di esercizi su rette e piani con metodi algebrici o con un approccio geometrico.

Equazioni cartesiane della retta passante per due punti assegnati. Vari metodi per trovarle: 1) proporzionalità e più robusto metodo degli orlati; 2) assorbimento del parametro a partire dalle equazioni parametriche; 3) equazioni generali della retta, metodo ancora da analizzare anche se un po’ lento in genere.

**Mar. 14-11:**

Note ed esercizi ulteriori su rette e piani nello spazio. Retta passante per due punti, casi parti­colari in cui occorre scegliere attentamente i due orli nella matrice 2×3 . Scrittura generale di una retta mediante 8 parametri (due equazioni cartesiane di piani generici). La risoluzione di problemi mediante questa scrittura è spesso complicata ma resta comunque valida e suggestiva come approc­cio alternativo.

Rette sghembe: per ricono­scerle, ricordiamolo, è sufficiente che il relativo determinante di ordine 4 non sia nullo; nota: le rette sghembe sono caratterizzate dalla assenza di un piano che le contenga entrambe (simulta­neamente). Nuovo meto­do: disponendo delle equazioni parametriche è possibile riconoscere due rette sghembe se (e solo se) un opportuno determinante di ordine 3 non è nullo.

Punti mobili su rette. Le equazioni parametriche di una retta esprimono i punti come funzione di un “tempo” t. Distanza di un punto mobile da un punto assegnato. Equazione di una sfera e interpre­tazione alternativa della distanza precedente mediante l’intersezione della retta con una sfera op­portuna.

**Mer. 15-11:**

Esercitazione: simulazione di una parte di prova scritta con consigli e suggerimenti per un mi­gliore approccio all’esame, sia scritto che orale.

**Gio. 16-11:**

Nuovo concetto: il prodotto scalare - e i suoi legami con l’ortogonalità, gli angoli, le distanze. Prodotto scalare per vettori di uno spazio Rn . Formula del coseno per i casi bi- e tridimensionale (da dimostrare nella prossima lezione, solo nel caso bidimensionale). Vettore normale (a,b,c) relativo a un piano di equazione ax+by+cz+d=0 (dimostrazione della correttezza: esso è ortogonale a qualunque vettore della giacitura). Calcolo del coseno: angolo formato da due vettori o due rette, angolo tra due piani mediante i due vettori nor­mali, angolo tra retta e piano (attenzione, qui la formula restituisce il seno, non il coseno!). Proie­zione ortogonale (scalare) di un vettore lungo la direzione definita da un secondo vettore.

**Ven. 17-11:**

Dimostrazione della formula che lega il prodotto scalare al coseno, nel caso bidimensionale (dimostriamo in effetti la formula per la proiezione ortogonale, equivalente).

Distanza di un punto da un piano, vari modi per calcolarla e infine: formula con dimostrazione. La formula è analoga a quella per la distanza punto-retta in un riferimento Oxy. La dimostrazione può essere infatti riprodotta con opportune modifiche.

**Mar. 21-11:**

Approfondimenti sull’ortogonalità e le distanze. Prodotto vettoriale, formula (l,m,n) ora sorpren­dentemente utile in questo nuovo contesto; il prodotto vettoriale è un vettore ortogonale ai due vettori dati e il suo modulo coincide con l’area del parallelogramma relativo ai due vettori (pro­prietà fondamentale, da dimostrare nella prossima lezione). Giustificazione geometrica della formula (l,m,n) mediante un opportuno sistema di due equazioni in tre incognite, sistema che esprime appunto la richiesta di ortogonalità.

Distanza minima tra rette sghembe; metodo del piano contenente una retta e parallelo all’altra - con la distanza punto-piano conclusiva); metodo della proiezione ortogonale di due rispettivi vettori direttori, lungo la direzione del loro prodotto vettoriale. Cenno alla distanza minima calcolata mediante le “derivate parziali” (argomento successivo di analisi).

**Mer. 22-11:**

Definizione geometrica del prodotto vettoriale. Prodotto vettoriale inerente ai versori **i**, **j**, **k**. Antagonismo tra il prodotto vettoriale e il prodotto scalare (seno vs coseno), con una ulteriore differenza, strutturale: il prodotto scalare è un numero, il prodotto vettoriale è un vettore, quindi contiene molte più informazioni. Non dimostriamo la distributività del prodotto vettoriale ma la utiliz­ziamo per dimostrare la formula (l,m,n). Calcolo di aree mediante il prodotto vettoriale.

Primi cenni sull’ortogonalità in spazi Rn qualunque. Un sistema lineare omogeneo di q equazioni in n incognite può essere interpretato come q condizioni di ortogonalità che devono soddisfare le soluzioni (vettori di Rn).

Questionari OPIS, nell’ultimo quarto d’ora.

**Gio. 23-11:**

Nuovo punto di vista nella risoluzione dei sistemi lineari: un sistema lineare equivale alla ricerca di idonee *controimmagini* per la funzione da Rn a Rm definita dalla matrice incompleta m×n mediante il prodotto col vettore delle incognite poste in colonna. Una funzione di questo tipo è un caso particolare di “funzione lineare”.

Rappresentazione geometrica e insiemistica del dominio e del codominio nel caso di una fun­zione lineare.

Autovettori e autovalori per funzioni lineari con dominio Rn coincidente col codominio. Metodo di calcolo per gli autovettori (da dimostrare nelle prossime lezioni). Cenno alla diagonalizzazione (trasformazione di una matrice in una nuova matrice, diagonale, che rappresenta la stessa funzione in un riferimento diverso, più comodo, relativo agli autovettori.

**Ven. 24-11 (9.00 – 10.00):**

Esercizi di approfondimento sugli autovettori, anche in spazi R3. Caso dell’autovalore zero. Interpretazione geometrica e collasso della dimensione. Cenni alla suriettività.

**Mar. 28-11:**

Definizione generale di applicazione lineare tra due spazi vettoriali qualunque, mediante le due proprietà fondamentali. Le funzioni tra spazi Rn definite mediante le matrici sono lineari (segue dalle proprietà del prodotto di matrici). Primi cenni alla matrice di un’applicazione lineare definita secondo le basi scelte, per spazi vettoriali generici. Cambiamento di coordinate e conseguente modifica della matrice; primo esempio, mediante una base di autovettori; secondo esempio: matrice associata all’applicazione lineare “derivata” per polinomi di grado al più 3 (scegliamo la base {1 , x , x2 , x3}.

Un esempio di applicazione lineare priva di autovettori: rotazione nel piano (è presente anche una dilatazione ma non ha un ruolo essenziale).

**Mer. 29-11:**

Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. La seconda non supera in alcun caso la prima (teorema che non dimostriamo, tuttavia la dimostrazione non è complessa). La diagonalizzazione è possibile soltanto se le due molteplicità coincidono per ogni autovalore. Dimostrazione algebrica della diagonalizzazione. Matrici simili. Esempi di matrice non diagonaliz­zabile per la mancanza di sufficienti autovettori: caso 2×2 (sussiste un solo autovalore con m.a. 2 e m.g. 1). Altri approfondimenti sulla diagonalizzazione.

**Gio. 30-11:**

Matrice di un’applicazione lineare rispetto a due basi assegnate, nel dominio e nel codominio, definizione generale mediante le coordinate. Esempio delle matrici triangolari superiori. Esempi in spazi Rn . Immagini e controimmagini. Suriettività e iniettività in relazione al rango. Nucleo (Ker): significato algebrico e interpretazione geometrica.

**Ven. 01-12:**

Dimostrazione formale: lo zero viene portato nello zero, data una qualunque applicazione lineare. Iniettività e nucleo: il nucleo consiste del solo zero se e solo se la funzione è iniettiva. Esempi ulte­riori di matrici in relazione alla suriettività e all’iniettività. Esercizi su­periori: costruzione della matrice di un’ap­plicazione lineare rispetto a basi assegnate, nel dominio e nel codominio. Matrici del cambiamento di coordinate e trasformazione di una matrice (cambiando le basi nel dominio).

**Mar. 05-12:**

Dettagli sulle matrici del cambiamento di coordinate ed esempi. Composizione di funzioni e relativo prodotto di matrici. Schema del cambiamento di coordinate relativo a una diagonalizza­zione; analogia linguistica con il condizionale di un verbo in italiano e in inglese. Diagonalizza­ .autovettori a due a due ortogonali; nel caso 2×2 il relativo cambiamento di coordinate può essere interpretato come una rotazione (normalizzando gli autovettori).

**Mer. 06-12:**

Note conclusive sulle applicazioni lineari e le relative matrici. Relazione tra il nucleo e l’auto­valore zero. Funzione biunivoca e corrispondente matrice invertibile. Dimostrazione della formula per gli autovettori: il determinante viene posto uguale a zero per fare in modo che il rango non sia massimo. Esempio di rango iniziale minore del massimo: gli autovalori lo dovranno mante­nere minore del massimo, quindi un autovalore è sicuramente quello nullo (più eventualmente altri).

**Gio. 07-12:**

Nuovo argomento: coniche e rotazioni. Ellisse (definizione mediante il doppio cono e mediante i fuochi). Riduzione di un’ellisse inizialmente ruotata, a una forma canonica, mediante un’idonea rotazione degli assi cartesiani. Matrice 2×2 relativa a un polinomio omogeneo di grado 2 in due variabili (trinomio ax2+bxy+cy2). Diagonalizzazione mediante una matrice “ortogonale” (la sua trasposta coincide con l’inversa). Il teorema spettrale assicura la presenza di autovettori ortogonali. Rotazioni e riflessioni; il determi­nante di una matrice di rotazione vale 1 (dimostrazione mediante il prodotto vettoriale, approfondimento).

**Mar. 12-12:**

Calcolo delle coordinate originali di vertici o fuochi per un’ellisse. Parabola, definizione me­diante fuoco e direttrice. Rotazione di una parabola. Aggiustamento della matrice per il cambio di coordinate in modo che rappresenti una effettiva rotazione con l’ulteriore specifica dell’autovalore nullo davanti alla Y2 . Equazione originale della direttrice (la matrice da utilizzare è l’inversa, coincidente - lo sappiamo - con la trasposta).

**Mer. 13-12:**

Definizione di una conica (non soltanto la parabola!) mediante il fuoco e la direttrice; eccentri­cità. Coniche ottenute come sezioni di un doppio cono con piani opportuni. Invarianza del determinante per la matrice 2×2 di una conica a seguito di una rotazione. Il segno degli autovalori (autovalori concordi, discordi o eventualmente con la presenza dell’autovalore nullo) decide il tipo di conica. Matrice 3×3 associata a un polinomio generico di grado 2 in due variabili. Traslazioni. Matrice artificiale che sintetizza la traslazione e la successiva rotazione. Teorema: invarianza del determinante per la matrice 3×3 associata al polinomio iniziale. Metodo dei determinanti invarianti: senza passare per gli autovettori questo metodo consente di arrivare alla forma canonica.

**Gio. 14-12:**

Esercizi sul metodo degli invarianti anche nel caso della parabola. Da approfondire: la questione dell’autovalore nullo (invarianza della “traccia”).

Nuovo argomento: complementi vari. Proiezione ortogonale vettoriale. Coefficiente di Fourier. Primi cenni alla proiezione ortogonale su un piano mediante la decomposizione in una somma di due singole proiezioni ortogonali vettoriali.

**Mar. 19-12:**

Complementi vari.

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, esempio in un piano: creazione di una base ortogonale a partire da due vettori linearmente indipendenti.

Proiezione ortogonale ottenuta come somma di due singole proiezioni (data la base ortogonale).

Proiezione ortogonale ottenuta sottraendo dal vettore la sua proiezione sul vettore normale.

Ortogonalizzazione di una base in un sottospazio di dimensione 2 in R4 , seguita dalla proiezione ortogonale di un vettore esterno al sottospazio.

**Mer. 20-12 (15.00 – 17.00):**

Ultimi complementi. Ortogonalizzazione, secondo livello con tre vettori. Equazioni cartesiane di sottospazi in spazi generici Rn . Formula di Grassmann, senza dimostrazione. Esempi geometrici: piani e rette nello spazio. Conclusione del corso.

**Gio. 21-12:**

Esercitazione: simulazione di una parte di prova scritta relativamente agli argomenti trattati nella seconda metà del corso.

**Ven. 22-12 (10.00 – 12.00):**

Esercizi su richiesta.

------------------------------------------

**Lun. 29-01-2024 (15.00 – 17.00, aula 4):**

Eercitazione e ricevimento in aula, in vista della prova scritta fissata per il 5 febbraio.

------------------------------------------

*• Libro di testo (compresi gli esercizi nei relativi paragrafi):*

Cap. 1. Inizio del Cap. 2: 2.1. 2.2, 2.10. Cap. 2 intero. Cap. 3. Cap. 4. 5.1 (primi cenni del nuovo argomento), 5.3, 5.2. Cap. 6. Cap. 7. Cap. 5 intero (complementi vari).

Cap. 8 (per approfondimenti).