1. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,5,3)$ rispetto al sottospazio $S : 3x-y-w-z=0$. Calcolare poi la proiezione del medesimo vettore rispetto al sottospazio $T = \langle(1,0,1,0),(0,1,1,1),(7,7,14,7)\rangle$.

Sol. Nel primo caso è conveniente utilizzare la proiezione ortogonale rispetto al sottospazio ortogonale $S^\perp$ che è generato dal solo vettore $(3,-1,-1,-1)$. Al termine sottraiamo il risultato dal vettore dato. Otteniamo:

$$\underline{p} = (1,2,5,3) - \frac{(1,2,5,3)\times(3,-1,-1,-1)}{((3,-1,-1,-1)\times(3,-1,-1,-1)}(3,-1,-1,-1) =$$

$$= (1,2,5,3) - \frac{-7}{12}(3,-1,-1,-1) = \left(\frac{11}{4},\frac{17}{12},\frac{53}{12},\frac{29}{12}\right) .$$

Nel secondo caso, dopo aver eliminato ad es. il terzo vettore (il rango della relativa matrice vale 2), dobbiamo ortogonalizzare la base. Modifichiamo dunque $(0,1,1,1)$ ottenendo

$$(0,1,1,1) - \frac{(0,1,1,1)\times(1,0,1,0)}{(1,0,1,0)\times(1,0,1,0)}(1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1\right) ,$$

o meglio (possiamo moltiplicare per 2...) il vettore $(-1,2,1,2)$. Ora calcoliamo la proiezione:

$$\underline{p} = \frac{(1,2,5,3)\times(1,0,1,0)}{(1,0,1,0)\times(1,0,1,0)}(1,0,1,0) + \frac{(1,2,5,3)\times(-1,2,1,2)}{(-1,2,1,2)\times(-1,2,1,2)}(-1,2,1,2) = \left(\frac{8}{5},\frac{14}{5},\frac{22}{5},\frac{14}{5}\right) .$$

2. Calcolare una base di autovettori relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (3x, 5y-2z, 5y-2z)$. Diagonalizzare f mediante un idoneo prodotto di matrici.

Sol. Determiniamo prima gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 3-s & 0 & 0 \\ 0 & 5-s & -2 \\ 0 & 5 & -2-s \end{vmatrix} = (3-s)(s^2-3s) = 0 .$$

Compaiono, come radici, $s=3$ con molteplicità algebrica 2 e $s=0$ con molteplicità 1. Riuscirà $s=3$ a generare 2 autovettori linearmente indipendenti? Certamente, visto che nel testo si chiede una base (di $\mathbf{R}^3$). Risolvendo infatti il sistema

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 5-3 & -2 \\ 0 & 5 & -2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

notiamo che il rango scende a 1, quindi abbiamo due parametri; la soluzione generale è un *piano*, (h,k,k) con h e k reali (escludendo il vettore nullo). In questo piano (*autospazio* relativo all'autovalore 3) è possibile selezionare due vettori linearmente indipendenti, come ad es. $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$. Inoltre, il sistema analogo per l'autovalore 0 ha in questo caso rango 2,

$$\begin{pmatrix} 3-0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-0 & -2 \\ 0 & 5 & -2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

e porta al terzo autovettore: $(0,2,5)$. Notiamo che un tale vettore genera il *nucleo* di f, avendo l'autovalore nullo.

La diagonalizzazione può essere effettuata come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Nel nuovo riferimento f appare come una dilatazione di un fattore uguale a 3 nel piano OXY unita a un collasso lungo l'asse Z (proiezione). Il cubo unitario diventa un quadrato con le dimensioni amplificate di 3. Le facce "laterali" del cubo scompaiono a causa della compressione.

3. Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, ridurre a forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 14xy + 49y^2 - \sqrt{50}y - 2 = 0$. Scrivere un'equazione cartesiana della direttrice (nel riferimento iniziale).

Sol. La matrice associata alla parte di secondo grado è

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} .$$

Notiamo che essa ha il rango uguale a 1. Questo accade precisamente nel caso di una parabola, mentre per l'ellisse il determinante è positivo (gli autovalori sono concordi) ed è negativo per l'iperbole (discordi). Passando al calcolo degli autovalori otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 7 & 49-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2 - 50\lambda = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 0 \ \vee\ \lambda = 50 .$$

Autovettori: $(1,7)$ per $\lambda = 50$, $(7,-1)$ per $\lambda = 0$. Occorre cambiare il verso di $(7,-1)$ per evitare di unire alla rotazione una *riflessione*. Avremmo potuto, in alternativa, scambiare gli autovettori, ma avremmo così ottenuto la forma canonica con asse "orizzontale", forse meno familiare – la scelta sarebbe stata comunque ammissibile.

Il cambiamento di coordinate è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{X}{\sqrt{50}} - 7\frac{Y}{\sqrt{50}} \ ,\ y = 7\frac{X}{\sqrt{50}} + \frac{Y}{\sqrt{50}} .$$

Otteniamo: $50X^2 - \sqrt{50}\left(7\frac{X}{\sqrt{50}} + \frac{Y}{\sqrt{50}}\right) - 2 = 0$. La forma canonica è quindi

$$Y = 50X^2 - 7X - 2 .$$

L'equazione della direttrice è

$$Y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} = -\frac{449}{200} .$$

Le formule inverse,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(notare che l'inversa è in questo contesto la *trasposta*), consentono di ottenere l'equazione originale della direttrice; infatti abbiamo che

$$X = \frac{x}{\sqrt{50}} + 7\frac{y}{\sqrt{50}} \ ,\ Y = 7\frac{x}{\sqrt{50}} - \frac{y}{\sqrt{50}} ,$$

quindi sostituendo la Y (non è presente la X, nel caso della direttrice) otteniamo

$$7\frac{x}{\sqrt{50}} - \frac{y}{\sqrt{50}} = -\frac{449}{200} .$$

4. Dimostrare che l'operazione di prodotto vettoriale coincide col calcolo di "(ℓ, m, n)" come nel caso del vettore direttore di una retta nello spazio (presupporre la distributività e le altre proprietà basilari del prodotto vettoriale).

Sol. Dati due vettori $\vec{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$, $\vec{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, abbiamo:

$$(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) \wedge (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) =$$
$$= u_xv_x(\mathbf{i}\wedge\mathbf{i}) + u_xv_y(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) + u_xv_z(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) + u_yv_x(\mathbf{j}\wedge\mathbf{i}) +$$
$$u_yv_y(\mathbf{j}\wedge\mathbf{j}) + u_yv_z(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) + u_zv_x(\mathbf{k}\wedge\mathbf{i}) + u_zv_y(\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}) + u_zv_z(\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}) .$$

Ora, ricordando la definizione geometrica di prodotto vettoriale, è possibile eliminare tre dei nove addendi; inoltre possiamo raggruppare a due a due gli altri sei addendi, ottenendo il vettore

$$u_xv_y(\mathbf{k}) + u_xv_z(-\mathbf{j}) + u_yv_x(-\mathbf{k}) + u_yv_z(\mathbf{i}) + u_zv_x(\mathbf{j}) + u_zv_y(-\mathbf{i}) =$$
$$= (u_yv_z - u_zv_y)\mathbf{i} + (u_zv_x - u_xv_z)\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\mathbf{k} .$$