1. Determinare i valori di k per i quali la dimensione del sottospazio $\langle(2,k,3,1),(3,2,k-1,5),(3,4,4k,-2)\rangle$ scende da 3 a 2.

Sol. Consideriamo la matrice

$$M(k)=\begin{pmatrix} 2 & k & 3 & 1 \\ 3 & 2 & k-1 & 5 \\ 3 & 4 & 4k & -2 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando il teorema degli orlati, fissiamo ad es. la sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – essa ha il determinante diverso da zero – e cerchiamo i valori di k che annullano i determinanti dei due orli. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 3 \\ 3 & 2 & k-1 \\ 3 & 4 & 4k \end{vmatrix} = -9k^2+5k+26=0 \ \Rightarrow k=2 \vee k=-\frac{13}{9} \ ;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 21k-42=0 \ \Rightarrow k=2 \ .$$

Esiste un unico valore comune, $k=2$, che ha la proprietà richiesta.

2. Scrivere equazioni cartesiane della retta incidente l'asse x, passante per $A=(3,7,1)$ e parallela al piano $\pi: 8x-6y-z+3=0$.

Sol. Un punto della retta richiesta è necessariamente del tipo $P_t=(t,0,0)$. Imponendo che il vettore $\overrightarrow{P_tA}$ sia parallelo a π otteniamo la condizione

$$8(3-t)-6(7-0)-1(1-0)=0$$

che porta al valore di $t=-\frac{19}{8}$. Possiamo ora trovare due equazioni cartesiane imponendo che valga 1 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} x+\frac{19}{8} & y-0 & z-0 \\ 3+\frac{19}{8} & 7-0 & 1-0 \end{pmatrix} .$$

Orliamo la sottomatrice costituita dal solo 1, nel posto $(2,3)$: otteniamo

$$\begin{cases} 8x-43z+19=0 \\ y=7z \end{cases} .$$

Un metodo alternativo consiste nella costruzione di due piani opportuni le cui equazioni danno luogo alla retta richiesta: il piano contenente l'asse x e passante per A, e quello parallelo a π e sempre passante per A. Otteniamo $\lambda y+\mu z=0$ con $7\lambda+\mu=0$ (ad es. $\lambda=1$, $\mu=-7$) e $8x-6y-z+d=0$ con $d=19$. Notiamo che le due soluzioni differiscono per una equazione (potrebbero differire anche per entrambe!) ma sono corrette in ogni caso.

3. Data la matrice

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,$$

verificare che $M^{-1}=M^t$.

Sol. Il calcolo di M^{-1} può essere effettuato col classico metodo dei complementi algebrici ma è certamente lungo e poco agevole. Ad esempio, già il determinante di M non è semplice da calcolare; utilizzando la regola di Sarrus otteniamo

$$|M|=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=1 \ .$$

Questo risultato facilita la scrittura della futura matrice inversa. Ora ad es. calcoliamo il complemento algebrico $\mu_{2,1}$ del posto $(2,1)$; esso occuperà il posto $(1,2)$ nella matrice inversa. Abbiamo:

$$\mu_{2,1} = (-1)^{2+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \ .$$

Curiosamente, $\mu_{2,1} = m_{2,1}$. Potremmo procedere con gli altri 8 complementi algebrici e troveremmo in effetti esattamente i numeri di M, nei posti giusti, dimostrando così la proprietà richiesta: l'inversa è esattamente la trasposta.

Esiste un metodo più diretto: basta calcolare il prodotto

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ .$$

Esso è uguale alla matrice identità I_3, dunque effettivamente M^t è l'inversa di M e l'esercizio è concluso.

Osserviamo che la proprietà $M^{-1} = M^t$ scaturisce da speciali relazioni tra le righe di M. Infatti il prodotto tra M e M^t chiama in causa tutti i possibili prodotti scalari tra le righe, ma queste ultime sono vettori a due a due ortogonali. Oltretutto esse sono versori, quindi otteniamo gli "1" sulla diagonale principale; essi, insieme agli "0" legati all'ortogonalità, portano alla matrice I_3. Notiamo infine che il determinante uguale a 1 ha a che fare col teorema di Binet:

$$1 = |I_3| = |M \cdot M^{-1}| = |M| \cdot |M^{-1}| = |M| \cdot |M^t| = |M|^2 \ ,$$

da cui segue che $|M|$ può valere 1 oppure -1 (più precisamente, vale 1 se e solo se i tre vettori-riga ordinati formano una terna orientata concordemente).

Le matrici che hanno l'inversa uguale alla trasposta si dicono, non a caso, *ortogonali*.

4. Soltanto uno dei due seguenti insiemi è un sottospazio. Dopo averlo riconosciuto, determinarne una base.

$$S = \{(x,y,w,z) \in \mathbf{R}^4 \colon 2x = 0\} \quad , \quad T = \{(x,y,w,z) \in \mathbf{R}^4 \colon 2 - y = 0\} \ .$$

Sol. Potremmo invocare il teorema secondo il quale i sottospazi corrispondono ai sistemi omogenei, quindi il sottospazio è S. In alternativa possiamo notare che $\underline{0} \notin T$. Una forma parametrica di S è $(0,y,w,z)$; col metodo $1-0$ otteniamo un insieme di generatori, $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ che in effetti è una base perché i tre vettori sono linearmente indipendenti.

5. Soltanto uno dei due seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio. Dopo averlo riconosciuto, determinarne una base.

$$S = \{(a+b+c, a-b+2c, a^2)\} \quad , \quad T = \{(a+c+d, a+b+2c, a+c+d)\} \ .$$

Sol. L'insieme S non ha la proprietà dell'opposto perché la componente a^2 non è mai negativa. Confidando nel testo, siamo quindi certi che T è un sottospazio. Per conferma, col metodo $1-0$ possiamo scrivere i vettori di T come

$$a(1,1,1) + b(0,1,0) + c(1,2,1) + d(1,0,1) \ .$$

È chiaro quindi che T è un sottospazio, dato che è un insieme generato da alcuni vettori. Una base di T consiste di due dei 4 vettori, scelti a piacere. Infatti il rango della matrice che li ha come righe vale 2, e nessuna delle 6 coppie di vettori consiste di vettori proporzionali. (perché abbiamo 6 scelte?...).

QUESITI

⊙ Le matrici invertibili di ordine 2 non formano un sottospazio (nello spazio vettoriale delle matrici di ordine 2). [V]

⊙ Esistono insiemi di 4 generatori di $\mathbf{R}^3$. [V]

⊙ Le giaciture di due rette sghembe non hanno intersezione. [F]

⊙ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ sulla retta $r : x + y + z = y - z - 3 = 0$. $[\frac{5}{\sqrt{6}}]$

$\odot$ Calcolare la seconda coordinata del vettore $(2, 3, 3, \sqrt{2})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 8)\}$. [1]

$\odot$ Calcolare il rango della matrice 9×9 che contiene tutti zeri ad eccezione dei 4 elementi negli angoli, uguali a $\sqrt{2}$, e dell'elemento nel posto centrale $(5, 5)$, uguale a π. [2]