Soluzioni e osservazioni

(esercizi di algebra lineare e geometria)

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

Anno Accademico 2022 - 2023

Argomenti

p. 3	Matrici
p. 6	Spazi vettoriali, rango, sottospazi
p. 14	Geometria del piano
p. 16	Geometria dello spazio
p. 25	Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica
p. 31	Applicazioni lineari, autovettori, nuove coordinate
p. 40	Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi
p. 47	Coniche e complementi

1

Matrici

Es. 1. Calcolare le inverse delle matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi & 0 \\ 0 & 0 & 123 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sol. $L^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{123} \end{pmatrix} \quad , \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$

Es. 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare $CA + B^{-1}$. Verificare poi il teorema di Binet nel caso del prodotto $B \cdot B$.

Sol. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. $|B| \cdot |B| = 1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = |B \cdot B|$.

Es. 3. Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcolare i 5 rispettivi ranghi. Calcolare A^{-1} e B^{-1} purché ciò sia possibile. Dei prodotti AC, AD, CA, DA calcolare solo quelli leciti.

Sol. Ranghi: 3, 2, 2, 1, 2; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$. $AD = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 10 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}$. $CA = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 11 & 82 & 12 \end{pmatrix}$.

Es. 4. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol. Sottraendo la metà della prima riga a ciascuna delle altre righe, e scrivendo le nuove righe al posto delle rispettive righe iniziali, otteniamo una matrice il cui determinante è lo stesso di quello iniziale (infatti abbiamo utilizzato operazioni del tipo $\underline{r} \to 1 \cdot \underline{r} + \alpha \underline{r}'$). Abbiamo, poi,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = -2(-24) = 48 .$$

Es. 5. Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol. Utilizzando il teorema di Binet otteniamo facilmente $-14 \cdot (-10) \cdot 3 = 420$ (notiamo che le matrici sono oltretutto triangolari, dunque ciascun determinante è il prodotto dei termini sulla diagonale principale).

Es. 6. Calcolare

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

utilizzando la definizione originale di determinante.

Sol. Il metodo delle permutazioni non crea troppe difficoltà in questo esercizio, visto che in ogni riga ci sono pochi numeri non nulli. Definiamo intanto con $(abcd)$ la permutazione che associa 1, 2, 3, 4 ad a, b, c, d rispettivamente. Soltanto 2 permutazioni tra le 24 disponibili sono tali che $a \in \{1, 2\}$, $b \in \{2, 4\}$, $c \in \{1, 3\}$ e $d \in \{3, 4\}$ (esercizio): esse sono (1234) (di segno pari) e (2413) (dispari). Il determinante è dunque uguale a $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} = -66 - 16\pi\sqrt{3}$.

Es. 7. Dimostrare che l'inversa di una matrice — se esiste — è unica.

Sol. Data una matrice invertibile M, Supponiamo che esistano due matrici A, B tali che $AM = MA = I_n$ e $BM = MB = I_n$. Abbiamo:

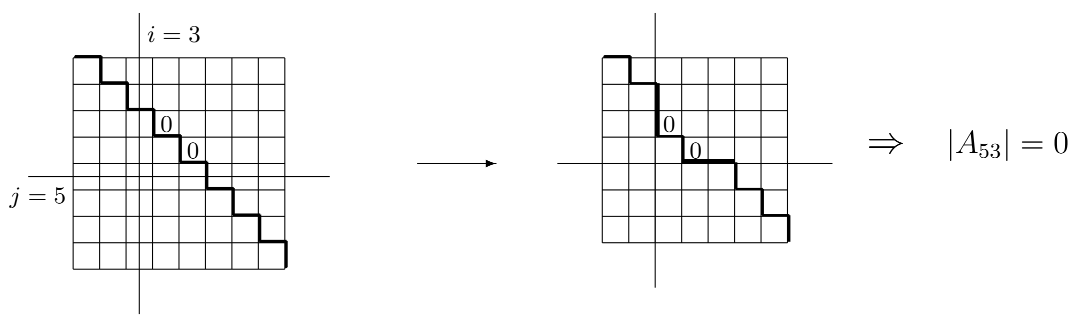
$$B = I_n B = (AM)B = A(MB) = AI_n = A\ .$$

Notiamo che il terzo "=" esprime l'associatività del prodotto di matrici.

Es. 8. Dimostrare che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (invertibile) è triangolare inferiore.

Sol. Sia $A = (a_{ij})$ triangolare inferiore invertibile (formalmente, $a_{ij} = 0\,\forall\, i < j \wedge a_{ii} \neq 0\,\forall\, i$). Scegliamo arbitrariamente i e j con $i < j$; mostreremo che il complemento algebrico α_{ji} (ricordiamoci di scambiare gli indici!) è nullo. Tale complemento è uguale a $(-1)^{j+i}|A_{ji}|$. Non è difficile dimostrare che la sottomatrice A_{ji} è triangolare inferiore e, in aggiunta, ha alcuni elementi nulli sulla diagonale, precisamente quelli nei posti (t, t) con $i \leq t \leq j - 1$ (eventualmente soltanto un posto, se $j = i + 1$); nella figura è illustrato il caso di α_{53} in una matrice di ordine 8.

In conclusione, poiché $|A_{ji}|$ è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, esso è nullo; dunque α_{ji} è nullo.



Es. 9. Esibire, mediante opportuni parametri, tutte le matrici $M \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che $M^2 = I_2$ e tutte le matrici $N \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che N^2 sia la matrice nulla.

Sol. Nel primo caso imponiamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}.$$

Se $b \neq 0$ allora $a=-d$, inoltre $c=\frac{1-a^2}{b}$. Se $b=0$ ma $c \neq 0$, necessariamente $a=-d=\pm 1$; se poi $b=c=0$ allora $a=\pm d=1$. In sintesi, abbiamo le seguenti tipologie:

$$\begin{pmatrix} a & b \neq 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c \neq 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso il relativo sistema è

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=0 \end{cases}.$$

ragionando in modo analogo otteniamo le seguenti tipologie:

$$\begin{pmatrix} a & b \neq 0 \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

2

Spazi vettoriali, rango, sottospazi

Es. 10. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Sol. Per $T = 0$ il rango vale 1, dato che esiste soltanto una riga non nulla; per $T \neq 0$ esso è uguale a 3, perché possiamo isolare un minore non nullo di ordine 3.

Es. 11. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T \\ T & 0 & T & T \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Sol. Applichiamo il teorema degli orlati utilizzando le righe 1,3 e le colonne 1,2. Il rango resta uguale a 2 se i minori $(-T)$ e $(T^2 - T)$ sono simultaneamente nulli; dunque per $T = 0$ il rango vale 2, altrimenti è uguale a 3. Una risoluzione più diretta si basa sull'esame della seconda riga: per $T = 0$ essa causa l'abbassamento del rango a 2 (le altre due righe non sono proporzionali); per $T \neq 0$ essa non può essere generata dalle altre righe perché la sua terza componente non è nulla.

Es. 12. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 8 & T \\ T & 1 & 8 & 1 \\ 2T & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Sol. Per $T = 1$ il rango vale 1, altrimenti è uguale a 2.

Es. 13. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 0 & 2 \\ 1 & T & 0 & 2 \\ 0 & 1 & T & 3 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Sol. Applichiamo il teorema degli orlati partendo dalla sottomatrice relativa alle righe 2,3 e alle colonne 1,4 (il determinante non è nullo poiché è uguale a 3 per ogni valore di T; questo controllo è indispensabile!). Imponendo ora l'annullamento dei minori relativi alle colonne 1,2,4 e 1,3,4 otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3T^2 - 2T - 1 = 0 \\ -T(2T - 2) = 0 \end{cases} .$$

Si tratta di due equazioni in una incognita; il valore $T = 1$ è una soluzione comune, dunque essa abbassa il rango a 2, mentre $-\frac{1}{3}$ e 0 non abbassano il rango (si annulla soltanto uno dei due minori). In conclusione, il rango vale 3 per ogni $T \neq 1$; per $T = 1$ esso vale 2.

Notiamo che un'altra sottomatrice da utilizzare sin dall'inizio è quella in basso a sinistra (pur contenendo la T, ha il determinante invariante, uguale a 1). In questo caso le colonne da considerare sarebbero le 1,2,3 e 1,2,4.

Es. 14. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 0 \\ 8 & 1 & 17 & 7 \end{pmatrix}$.

Sol. Applichiamo il teorema degli orlati partendo dalla sottomatrice M relativa alle righe 1,2 e alle colonne 1,2. Occorre considerare le 4 sottomatrici che orlano M mediante l'aggiunta di una riga a scelta tra la terza e la quarta, e di una colonna a scelta tra la terza e la quarta. Se i 4 minori sono tutti nulli, allora per il teorema degli orlati lo sono anche tutti gli altri minori di ordine 3, quindi il rango vale 2. Se invece durante i calcoli emerge che un minore è diverso da zero, allora il rango vale almeno 3 e dobbiamo successivamente calcolare il determinante di ordine 4 per stabilire se il rango vale 3 o addirittura 4. In effetti, la risoluzione termina dopo la verifica che i 4 minori di ordine 3 sono nulli. Il rango vale quindi 2.

Un metodo alternativo è la riduzione a scala — troveremmo due righe di zeri. Possiamo anche scommettere sulla dipendenza lineare delle prime tre righe, tentando di ottenere la terza riga (e poi la quarta) come combinazione lineare delle prime due. Si tratta di una scelta precisa che ci porta via del tempo, ma se funziona abbiamo un ottimo risultato. In questo esercizio specifico, gli zeri forniscono indizi importanti e con un breve ragionamento possiamo effettivamente dedurre che $\underline{r}_3 = 3\underline{r}_1 - \underline{r}_2$ e che $\underline{r}_4 = \underline{r}_1 + 2\underline{r}_2$. La scommessa è stata vinta, almeno in questo caso! La matematica $\boxed{è}$ un'opinione, a qualsiasi livello, perché le strategie possono essere molteplici e non è detto che esista sempre un unico metodo risolutivo, vincente e robusto, per tutti i problemi di un certo tipo.

Es. 15. Determinare gli eventuali valori reali di k tali che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & k+1 & 7 \\ k & 10 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Sol. In questo contesto il teorema degli orlati appare competitivo rispetto alla riduzione a gradini o alla ricerca di combinazioni lineari esplicite. Comunque, anziché spendere tempo per riflettere sulla strategia migliore al fine di non spendere troppo tempo... procediamo appunto col calcolo di due minori orlati anche se resta il dubbio sul tempo che impiegheremo rispetto ad altri metodi...

Una sottomatrice invariante e con determinante non nullo è quella relativa alle righe 2, 3 e alle colonne 2, 4. Considerando i suoi orli, imponiamo che siano nulli i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 4 & 7 \\ k & 10 & 19 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & k \\ 4 & k+1 & 7 \\ 10 & 17 & 19 \end{vmatrix} .$$

Dividendo per 2 la colonna $(2, 4, 10)^t$ non cambierà la nullità o meno del determinante. Studiamo dunque i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 7 \\ k & 5 & 19 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & k \\ 2 & k+1 & 7 \\ 5 & 17 & 19 \end{vmatrix} .$$

Nel primo caso, sviluppando il determinante lungo la prima riga otteniamo l'equazione

$$38 - 35 - 38 + 7k + 10k - 2k^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2k^2 - 17k + 35 = 0$$

le cui soluzioni sono 5 e $\frac{7}{2}$. Passando al secondo orlo otteniamo l'equazione

$$(19k + 19 - 119) - 5(38 - 35) + k(34 - 5k - 5) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5k^2 - 48k + 115 = 0$$

con soluzioni uguali a 5 e $\frac{23}{5}$.

Ora l'utilizzo dei dati deve essere fatto con attenzione: soltanto per $k = 5$ i due minori valgono zero simultaneamente, quindi 5 è l'unico valore che soddisfa la richiesta iniziale.

Es. 16. Determinare i valori di k tali che il sottospazio $\langle(1,1,0,k),(1,k,0,1),(k,-1,3,0)\rangle$ abbia dimensione 2.

Sol. Poniamo in riga i tre vettori, formando una matrice, e orliamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ imponendo l'annullamento dei determinanti dei due orli. Otteniamo: $-3+3k=0 \wedge -3+3k^2=0$, quindi l'unico valore che abbassa la dimensione da 3 a 2 è $k=1$ (per $k=-1$ si annulla soltanto un minore, quindi il rango resta uguale a 3).

Es. 17. Determinare i valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(1,1,1,2,k)$, $(k,1,3,3,-2)$, $(7,3,k,7,8)$.

Sol. Consideriamo la matrice

$$M(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ k & 1 & 3 & 3 & -2 \\ 7 & 3 & k & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando il teorema degli orlati potremmo fissare ad es. la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ — essa ha il determinante diverso da zero — per poi imporre che i tre determinanti relativi alle colonne $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$ siano nulli. Percorriamo invece un'altra strada, riducendo M a gradini e imponendo che i pivot siano meno di tre. Ciò sarà realizzabile soltanto se esisteranno pivot dipendenti da k; se però troveremo tre pivot costanti il rango di M sarà 3 a prescindere da k. Procediamo dunque con una riduzione a scala. Con $\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - k\underline{r}_1$ e $\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 7\underline{r}_1$ otteniamo

$$M_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1-k & 3-k & 3-2k & -2-k^2 \\ 0 & -4 & k-7 & -7 & 8-7k \end{pmatrix} .$$

Ora eseguiamo l'operazione $\underline{r}_3 \to (1-k)\underline{r}_3 + 4\underline{r}_2$, purché k sia diverso da 1. Otteniamo

$$M_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1-k & 3-k & 3-2k & -2-k^2 \\ 0 & 0 & -k^2+4k+5 & -k+5 & 3k^2-15k \end{pmatrix} .$$

Affinché il rango di M sia 2 deve esistere un valore di k che faccia scomparire il terzo pivot rendendo nullo il termine $-k^2+4k+5$, ma non solo: deve annullarsi l'intera terza riga. Effettivamente una delle due radici di $-k^2+4k+5$ ($k=5$) annulla anche gli altri due polinomi. Per $k=5$ siamo quindi certi che le tre righe sono linearmente dipendenti. In realtà sarebbe stato sufficiente analizzare il posto $(3,4)$ trovando così un solo valore, appunto $k=5$, che risultava poi essere anche una radice degli altri due polinomi.

Resta infine da vedere cosa accade se $k=1$; tornando a M_1 notiamo che $M_1(1)$ ha le prime tre colonne linearmente indipendenti (il relativo determinante non è nullo), quindi il suo rango vale 3. L'unico valore trovato resta perciò $k=5$.

Es. 18. Dimostrare che

$$S = \{(a+3b-c, 2a+c, 3a+b+c) \colon a,b,c \in \mathbf{R}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base.

Sol. Sostituendo 1 al posto di uno dei tre parametri e 0 altrove otteniamo tre vettori che risultano essere generatori di S. Infatti, $a(1,2,3)+b(3,0,1)+c(-1,1,1) = (a+3b-c, 2a+c, 3a+b+c)$;

in altri termini, $S = \langle(1,2,3),(3,0,1),(-1,1,1)\rangle$, quindi S è un sottospazio perché è il sottospazio *generato* da alcuni vettori. Questi tre generatori sono tuttavia linearmente dipendenti, dato che il determinante della matrice che li contiene come righe vale 0. Per ottenere una base occorre selezionare due vettori non proporzionali (due vettori qualunque, nel nostro caso).

Es. 19. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{S} = \{(a+b+c+d,a,a,b-d)\colon a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e determinarne una base.

Sol. Mediante il metodo "$1-0$" otteniamo i vettori $(1,1,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,0,0)$, $(1,0,0,-1)$ che risultano essere generatori di $\mathcal{S}$. Infatti

$$a(1,1,1,0)+b(1,0,0,1)+c(1,0,0,0)+d(1,0,0,-1) = (a+b+c+d,a,a,b-d)\ .$$

Dunque l'insieme $\mathcal{S}$ è in realtà un sottospazio, dato che è definibile mediante le combinazioni lineari di alcuni vettori (noto teorema...). Notiamo che questo ragionamento non è più valido se ad esempio consideriamo la forma parametrica $(a^2+b+c+d,a,a,b-d)$ oppure $(a+b+c+d,a,a,b+\sin(\frac{3\pi}{2}d))$, perché pur ottenendo gli stessi vettori di prima, non possiamo più risalire alla forma parametrica mediante semplici combinazioni lineari. I simboli algebrici introdotti sono troppo complessi, incomprensibili, con gli strumenti *lineari* che possediamo!

Per trovare un insieme minimale di generatori di $\mathcal{S}$ esaminiamo la matrice che li contiene come righe:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Questa matrice ha due colonne uguali, quindi il suo rango non supera 3. Eliminando la seconda colonna possiamo poi individuare facilmente un minore non nullo di ordine 3; come elementi della base di $\mathcal{S}$ possiamo scegliere le righe di E che intercettano tale minore.

Es. 20. Dati tre vettori linearmente indipendenti $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ di uno spazio vettoriale, dimostrare che $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}$, $2\underline{v}+3\underline{w}$ sono linearmente indipendenti e che invece $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$, $\underline{u}-3\underline{v}-\underline{w}$ non lo sono.

Sol. Supponendo che $\alpha(\underline{u}+\underline{v})+\beta(\underline{u}-\underline{v}-\underline{w})+\gamma(2\underline{v}+3\underline{w})=\underline{0}$, cioè che $(\alpha+\beta)\underline{u}+(\alpha-\beta+2\gamma)\underline{v}+(-\beta+3\gamma)\underline{w}=\underline{0}$, a causa dell'indipendenza lineare (di $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$) questi tre coefficienti ($\alpha+\beta$ ecc.) devono essere nulli. Il relativo sistema omogeneo ammette solo la soluzione $\alpha=\beta=\gamma=0$, quindi i tre vettori dati sono linearmente indipendenti. Nel secondo caso troviamo invece $\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t\ \forall t \in \mathbf{R}$. Abbiamo quindi infinite scelte (ad es. $\alpha=-2$, $\beta=\gamma=1$) per ottenere una combinazione lineare che dia lo zero senza ricorrere ad $\alpha=\beta=\gamma=0$. Come soluzione più veloce basta considerare il determinante della matrice delle coordinate rispetto a $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ (se è già noto il concetto di determinante...).

Es. 21. Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 3×3.

Sol. La matrice simmetrica nella sua forma più generale è $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. Ponendo un parametro uguale a 1 e gli altri uguali a 0, nei sei modi possibili, si ottiene una base (infatti abbiamo un insieme di generatori linearmente indipendenti).

Es. 22. Determinare una base dello spazio vettoriale dei polinomi $p(t)$ a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 4.

Sol. Dobbiamo esibire un insieme di polinomi (in questo caso essi sono vettori a tutti gli effetti) che generino qualunque polinomio di grado minore di 5, e che siano linearmente indipendenti. Un insieme di generatori è $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. Inoltre, se supponiamo che $\sum_{i=0}^{4} a_i t^i = 0$, necessariamente abbiamo tutti i coefficienti a_i nulli, quindi i 5 generatori costituiscono una base, essendo linearmente indipendenti. Curiosamente, la dimensione vale 5 anziché 4 (occorre generare anche i termini noti...).

Approfondiamo il tema (questa parte di esercizio riguarda le cosiddette *applicazioni lineari*, non ancora introdotte; può essere comunque letta per avere un'idea della nozione di *isomorfismo*). Possiamo interpretare questo insieme di polinomi come lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^5$, purché "leggiamo" il polinomio 1 come (1,0,0,0,0), il polinomio t come (0,1,0,0,0), e così via, fino a t^4 identificato con il quinto vettore della base canonica di $\mathbf{R}^5$, (0,0,0,0,1). Notiamo che questo accostamento rigido e formale acquista un suo dinamismo quando consideriamo ad esempio il polinomio $6 - 2t + 3t^3$. Infatti nel linguaggio di $\mathbf{R}^5$ otteniamo (attenzione: $6 = 6 \cdot 1$)

$$6 \cdot (1, 0, 0, 0, 0) - 2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + 3(0, 0, 0, 1, 0) = (6, -2, 0, 3, 0) \ ,$$

quindi la combinazione dei tre vettori genera lo stesso vettore che scriveremmo a partire dal polinomio, direttamente. Si tratta di un doppio percorso importante, classico. I due spazi vettoriali in esame — i polinomi con grado minore di 5 e lo spazio delle quintuple reali $\mathbf{R}^5$ — sono tra loro *isomorfi*. Infatti è possibile definire un'*applicazione lineare biunivoca* f che (come tutte le applicazioni lineari) trasporta fedelmente la somma di vettori e anche il prodotto con scalari (in simboli: $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})\,, f(\alpha\underline{u}) = \alpha f(\underline{u})$). La biiettività ci assicura che due elementi qualsiasi nel dominio corrispondono a due nel codominio, e viceversa. Dunque i due insiemi possono essere considerati uguali, almeno dal punto di vista della cardinalità (vedere anche l'Es. 94).

La linearità ci permette di lavorare nel dominio (ad es. sommando due o più elementi) per poi trasferire il risultato nel codominio, con la certezza che otterremmo lo stesso risultato se operassimo direttamente nel codominio, lavorando sulle *immagini* dei due o più elementi da trattare. Insomma, dopo aver acquistato un mobile da montare, possiamo montarlo direttamente nel negozio (se ce lo concedono) e poi trasportarlo a casa, oppure possiamo trasportare a casa i pezzi da montare e assemblarli successivamente. L'isomorfismo è appunto quella proprietà che ci consente di scegliere: montare e poi trasportare, oppure trasportare e poi montare: il risultato sarà lo stesso. Dunque è preferibile, e ragionevole, montare il mobile a casa. La situazione è ben diversa se la funzione è "fare un ritratto" dal dominio del mondo reale al codominio della tela. Se devo ritrarre un signore seduto in poltrona, non posso ritrarre il signore e la poltrona separatamente: occorre prima "sommare" i due componenti e poi ritrarli, insieme. Il difetto di questa funzione è in effetti la mancanza di iniettività (si tratta di una tipica operazione di "proiezione", come ad es. la funzione che porta (x, y, z) in (x, y), da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$).

Es. 23. Dimostrare che l'insieme delle funzioni — sia esso $\mathcal{M}$ — da un insieme generico T a uno spazio vettoriale V (sul campo reale), una volta munito delle operazioni di *somma di due funzioni* e di *prodotto di una funzione per uno scalare* diventa uno spazio vettoriale. Nota: la *somma* delle funzioni f e g è la funzione $f +_{\mathcal{M}} g$ che associa a un elemento $t \in T$ l'immagine $f(t) + g(t)$; per brevità possiamo utilizzare lo stesso simbolo $+$, ma ricordiamo che le due somme sono definite su insiemi diversi. Il *prodotto con uno scalare* $\alpha \cdot f$ associa a un elemento t l'immagine $\alpha \cdot f(t)$ (anche in questo caso dovremmo scrivere per esteso $\alpha \cdot_{\mathcal{M}} f$, per il primo prodotto).

Sol. Per ogni scelta di funzioni f e g si ha che $(f + g)$ applicata a un dato elemento $t \in T$ ha lo stesso effetto di $(g + f)(t)$, grazie alla commutatività della somma in V. In simboli,

$$\forall\, f, g \in \mathcal{M}, \forall\, t \in T \;\; (f + g)(t) = f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = (g + f)(t) \ .$$

Quindi l'operazione $+_\mathcal{M}$ è commutativa. Similmente potremmo dimostrare che la somma è associativa. L'elemento neutro rispetto alla somma in $\mathcal{M}$ è dato dalla funzione che porta tutti gli elementi di T nello zero di V. Anche in questo caso notiamo che lo zero di V permette di costruire un nuovo simbolo, diciamo $0_\mathcal{M}$, che ha appunto il ruolo di "funzione zero" nell'insieme $\mathcal{M}$. Inoltre, l'opposto di una data funzione f è quella funzione $-f$ che porta t in $-f(t)$, per ogni fissato elemento $t \in T$ (di nuovo identifichiamo due simboli distinti, i due "$-$"). I quattro restanti assiomi potrebbero essere dimostrati con lo stesso tipo di ragionamento. Soffermiamoci soltanto sulla proprietà dell'elemento $1 \in \mathbf{R}$: qualunque funzione f che venga moltiplicata per questo 1, resta la stessa. Infatti, per la definizione del prodotto con scalari in $\mathcal{M}$, abbiamo che

$$\forall\, t \in T \ \ (1 \cdot_\mathcal{M} f)(t) = 1 \cdot f(t) = f(t) \ ,$$

dove l'ultima uguaglianza sussiste grazie alle proprietà di V come spazio vettoriale reale.

Es. 24. Dimostrare che l'insieme delle funzioni derivabili, da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, è uno spazio vettoriale. I polinomi di grado minore o uguale a 4 formano un sottospazio di tale spazio vettoriale? E i polinomi di grado pari?

Sol. La somma di funzioni derivabili, $f+g$, definita da $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, è derivabile, e per ogni numero reale k è anche derivabile la funzione kf tale che $(kf)(x) = k(f(x))$. Dunque le operazioni di somma e di prodotto con scalari sono effettuabili. Verifichiamo gli 8 assiomi di spazio vettoriale. La funzione f tale che $f(x) = 0\ \forall x$ è derivabile. Essa funge da "zero" (cioè da elemento neutro rispetto alla somma) perché sommata a qualunque altra funzione non la altera. Data g derivabile, essa ammette la funzione opposta, $-g$, anch'essa derivabile. La somma è commutativa ed associativa. Il prodotto con scalari è associativo rispetto agli scalari ed è distributivo per entrambe le opzioni: $(h+k)f = hf + kf$ e $h(f+g) = hf + hg$, per ogni scelta di funzioni f, g e di costanti h, k. Infine, il prodotto $1 \cdot f(x)$ restituisce ancora $f(x)$.

In alternativa, questa parte di esercizio può essere risolta considerando l'insieme delle funzioni generali da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ e mostrando, intanto, che in esso sono definite le operazioni di somma e di prodotto con scalari mediante le quali l'insieme diviene uno spazio vettoriale (vedere l'Es. 23). Ora, le funzioni derivabili costituiscono un *sottospazio* di tale insieme, perché vale la regola di chiusura: la funzione $hf + kg$, che trasforma x in $hf(x) + kg(x)$, è derivabile per ogni scelta di funzioni f e g derivabili, e di costanti h, k.

Le due proprietà di chiusura valgono certamente per i polinomi di grado non superiore a 4, quindi essi costituiscono un sottospazio. Invece ad es. $(x^2+x+1) - (x^2-3)$ è un polinomio di grado dispari, dunque l'ultimo insieme non è un sottospazio.

Es. 25. Dimostrare che l'insieme W ottenuto privando $\mathbf{R}^2$ del vettore $(2,3)$, non è più uno spazio vettoriale (rispetto alle consuete operazioni). Fornire un esempio di sottospazio di $\mathbf{R}^2$ che sia contenuto in W e sia *massimale* — dunque non deve essere contenuto in altri sottospazi che siano contenuti in W.

Sol. L'opposto di $(-2,-3)$ non appartiene a W; questo pur piccolo difetto è sufficiente per compromettere la struttura di spazio vettoriale.

Sicuramente qualunque sottospazio generato da un solo vettore, purché non proporzionale a $(2,3)$, è contenuto in W. Un tale sottospazio è in effetti massimale, perché se potesse essere arricchito anche solo da un vettore, il nuovo sottospazio avrebbe dimensione 2 e quindi (teorema importante...) coinciderebbe con l'intero $\mathbf{R}^2$; in particolare, non sarebbe più contenuto in W. In sintesi, il salto di dimensione da 1 a 2 non rende possibili soluzioni intermedie. La possibilità di definire dimensioni intermedie, a valori non interi, è comunque prevista nel modello più generale della geometria *frattale*.

Es. 26. Sia $\mathbf{Q}^2$ l'insieme dei vettori $(p,q) \in \mathbf{R}^2$ le cui componenti sono numeri razionali. Dimostrare che tale insieme non è uno spazio vettoriale "sui numeri reali" (dunque rispetto al prodotto con scalari reali).

Sol. Ad es. moltiplicando $(4,7)$ per $\sqrt{2}$ otteniamo il vettore $(4\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$ non appartenente a $\mathbf{Q}^2$. Con l'occasione, osserviamo che i vettori a componenti razionali costituiscono uno spazio vettoriale "su $\mathbf{Q}$", cioè restringendo il prodotto ai soli scalari razionali. Una volta fatta questa ipotesi restrittiva, notiamo che anche la somma di due vettori di $\mathbf{Q}^2$ resta ovviamente in $\mathbf{Q}^2$, poi esiste lo zero e anche l'opposto di un dato vettore, ecc. Parleremo dunque di uno spazio vettoriale "sul campo dei numeri razionali".

Es. 27. Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi, $\mathbf{C}$, munito dell'usuale operazione di somma e dell'operazione di prodotto con scalari reali, è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali. Determinarne poi una base.

Sol. La somma di due numeri complessi è un'operazione associativa e commutativa. Esistono chiaramente l'elemento neutro — lo zero — e l'opposto di qualunque numero complesso fissato. Per ogni numero reale r vale la proprietà distributiva $r(z+z') = rz + rz'$ al variare dei numeri complessi z, z'; inoltre per ogni coppia di numeri reali r, r' si ha che $(r+r')z = rz + r'z$ al variare del numero complesso z. Esiste poi l'elemento neutro rispetto al prodotto con scalari (l'unità, 1) e infine vale l'associatività.

Notiamo che le due proprietà distributive valgono anche se al posto di numeri reali r, r' poniamo numeri complessi, ma l'esigenza di uno spazio vettoriale *reale* è più debole rispetto a quella di uno spazio vettoriale *complesso*: come spazio vettoriale reale, $\mathbf{C}$ "si accontenta" di funzionare bene rispetto alla sollecitazione con scalari reali, mentre dal punto di vista della somma interna esige comunque i 4 assiomi pertinenti. Fra l'altro, la sollecitazione "esterna" proviene da elementi che risiedono nello spazio stesso ma che in questo contesto vengono appunto interpretati come "agenti esterni".

Osserviamo che $\mathbf{C}$ è uno spazio vettoriale reale dotato anche di un *prodotto interno* con proprietà tali da renderlo un *campo*, come $\mathbf{R}$, ma in questo esercizio il prodotto tra due numeri complessi (dunque non tra un reale e un complesso) non è contemplato, potremmo dire che non ci interessa...

Nel cercare una base di $\mathbf{C}$ sul campo $\mathbf{R}$, proviamo a individuare un insieme di generatori minimale. Attenzione: i coefficienti delle combinazioni lineari dovranno essere numeri reali! Questa richiesta è fondamentale. Certamente un solo vettore (un numero complesso) z non riesce a generare tutto lo spazio: genererà il sottospazio $\{tz : t \in \mathbf{R}\}$ i cui numeri hanno tutti la stessa fase θ, oppure la fase $\theta + \pi$; si tratta dei numeri complessi della forma $\pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con θ fissato e $\rho \in \mathbf{R}$. D'altra parte, con i due vettori 1 e l'immaginario i è possibile generare l'intero $\mathbf{C}$, quindi una base è $\{1, i\}$. Come conferma, osserviamo che non è possibile ottenere 0 da una combinazione lineare $a \cdot 1 + b \cdot i$ con a e b non entrambi nulli. La dimensione di $\mathbf{C}$ su $\mathbf{R}$ è dunque uguale a 2.

La dimensione di $\mathbf{C}$ sul campo stesso $\mathbf{C}$ invece è 1, perché...

Es. 28. Consideriamo i seguenti tre insiemi che denotiamo con U, V, W rispettivamente: le matrici simmetriche 2×2; i polinomi in una variabile, di grado al più 2. I vettori geometrici dello spazio, applicati in un punto comune (ad esempio l'origine), pensati come forze fisiche. Dimostrare che i tre insiemi sono in effetti spazi vettoriali e dimostrare che hanno tutti la stessa dimensione. Concludere mostrando un isomorfismo mediante tre rispettive basi scelte a piacere.

Sol. L'insieme U è contenuto nello spazio vettoriale costituito da tutte le matrici 2×2, quindi è sufficiente verificare la proprietà di chiusura: date due matrici simmetriche S, T e dati due numeri reali α, β, certamente $\alpha S + \beta T$ è ancora una matrice simmetrica.

Per l'insieme V vale un discorso analogo, questa volta all'interno dello spazio vettoriale formato da tutti i polinomi. La combinazione lineare $\alpha f + \beta g$ restituisce ancora un polinomio di grado al più 2, supponendo ovviamente che lo siano f e g.

Nel caso del terzo insieme, W, dobbiamo invece verificare tutti gli assiomi perché non ci troviamo all'interno di uno "spazio vettoriale madre" in cui lavorare. La validità di tali assiomi segue comunque da semplici considerazioni geometriche lasciate come approfondimento.

Tutti questi spazi vettoriali hanno dimensione 3. Come esempio di basi possiamo infatti prendere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \ \{1, x, x^2\} \ , \ \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \ .$$

Pur non esistendo alcuna relazione naturale tra questi tre insiemi di vettori, è sempre possibile istituire un isomorfismo decidendo arbitrariamente gli accoppiamenti. Ad esempio, un criterio è quello di accoppiare due elementi delle rispettive basi se essi occupano ordinatamente lo stesso posto all'interno delle parentesi graffe. Non esiste alcuna ragione superiore nell'associare il polinomio x al vettore geometrico $\mathbf{j}$ o alla matrice simmetrica contenente due 1 ! Si tratta di una scelta come tante altre (quante? Sei... anzi trentasei... dimostrare...).

A questo punto, mediante tre *coordinate* p, q, r è possibile descrivere qualunque matrice simmetrica

$$p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \ ,$$

come anche un polinomio qualsiasi

$$p \cdot 1 + q \cdot x + r \cdot x^2 = rx^2 + qx + p \ ,$$

e infine anche un vettore dello spazio,

$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \ .$$

Insomma, matrici, polinomi e vettori perdono le loro caratteristiche peculiari e vengono uniformati, omologati mediante tre numeri che li rappresentano. Non è più possibile distinguere un vettore da una matrice! Infatti lo spazio vettoriale nascosto dietro a questi tre non è altro che il buon vecchio $\mathbf{R}^3$, semplice da definire ma tanto potente da saper descrivere qualunque altro spazio vettoriale di dimensione 3, essendo $\mathbf{R}^3$ appunto isomorfo a un tale spazio. Bastano quindi gli spazi $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, ... $\mathbf{R}^n$, per i nostri ragionamenti, purché decidiamo di attivare la nozione di isomorfismo (e non è sempre un bene!).

3

Geometria del piano

Es. 29. Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per $(8,0)$ e $(8,3)$, poi un'equazione della retta passante per $(3,3)$ e $(-30,-30)$.

Sol. Possiamo rispondere molto sinteticamente alla prima domanda notando che i due punti hanno la medesima ascissa, quindi la retta che li contiene è il luogo dei punti aventi l'ascissa uguale a 8, in simboli: $x = 8$ oppure $x-8 = 0$. Possiamo invece utilizzare il determinante e la proporzionalità rispetto al vettore $(8-8, 3-0) = (0,3)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ x-8 & y-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3(x-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \; .$$

Notiamo che il determinante non si cura dello zero all'interno della matrice e procede tranquillamente, a differenza della proporzionalità (con le linee di frazione) che invece sarebbe vulnerabile in casi come questo.

Con simili considerazioni arriviamo anche alla seconda equazione, $y = x$.

Es. 30. Data la retta r di equazione $3x + 4y + 7 = 0$, determinare un'equazione cartesiana della retta parallela a r e passante per $(8,-2)$. Determinare poi un'equazione cartesiana della retta perpendicolare a r e passante per $(0,2)$.

Sol. Possiamo svincolare il termine noto c e imporre il passaggio per il punto dato. L'equazione $3x + 4y + c = 0$ diviene $3 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) + c = 0$, dunque $c = -16$.

Un vettore ortogonale a r è $(a,b) = (3,4)$. Si può procedere come nel caso precedente, utilizzando l'equazione $4x-3y+c = 0$, da cui si ottiene $c = 6$; in alternativa, si può costruire l'equazione di una retta parallela al vettore $(3,4)$ e passante per il punto $(0,2)$: $(x-0) \cdot 4 = (y-2) \cdot 3$, ecc.

Es. 31. Che differenza c'è tra il *punto* $(7,9)$ e il *vettore* $(7,9)$?

Sol. Il punto (7,9) occupa un "punto" preciso del piano, una volta fissato un sistema di riferimento. Il vettore (7,9) invece descrive ad esempio una "pendenza", e la sua posizione non ha importanza, mentre ciò che veramente conta è appunto la sua inclinazione, e in certi casi anche il verso e la lunghezza. Quando un vettore viene "ancorato" a un punto, allora si parla di "vettore applicato", e solo in quel caso dobbiamo disegnarlo in un punto preciso. Da tale punto si origina la freccia che avrà poi le caratteristiche del vettore. La bandiera italiana esiste nella nostra mente, indipendentemente da dove si pianta la sua asta. Esistono poi moltissime "bandiere applicate".

Es. 32. Rappresentare graficamente la retta r descritta in forma parametrica come $x = 6t + 2$, $y = 7t-4$. Stabilire se i punti $(20,17)$ e $(20,18)$ appartengono a r. Scrivere poi una forma cartesiana di r.

Sol. $\vec{v_r} = (6,7)$, in particolare $m = \frac{7}{6}$. Per $t = 0$ si ha il punto $(2,-4)$, di r. Si può quindi disegnare la retta, applicando in $(2,-4)$ il vettore $(6,7)$ e prolungando il vettore in entrambi i versi.

Affinché $(20,17)$ sia un punto di r, deve essere $20 = 6t + 2$ da cui $t = 3$; di conseguenza $y = 7 \cdot 3 - 4 = 17$; dunque $(20,17) \in r$. Nel secondo caso si ottiene una condizione impossibile, dunque non c'è appartenenza. Per scrivere un'equazione cartesiana: $t = \frac{x-2}{6} \Rightarrow y = 7\frac{x-2}{6} - 4 \Rightarrow 7x - 6y - 38 = 0$.

Es. 33. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche della retta r passante per $(4,1)$ e parallela all'asse x. Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{1300}$ dalla retta di equazione $2x+3y+5=0$.

Sol. Eq. cartesiana: $y=1$. Eq. parametriche: $x=t, y=1$. Imponendo la distanza data (tramite la formula della distanza), si trova $t=61$ e $t=-69$.

Es. 34. Calcolare la proiezione ortogonale (scalare non negativo) del vettore $(8,9)$ sulla retta $r: x-3y+102=0$.

Sol. È consigliabile traslare la retta sull'origine e applicare il vettore nell'origine; infatti la quota non gioca alcun ruolo in questo esercizio! La retta parallela a r e passante per l'origine, sia essa r', ha come equazione cartesiana $x-3y=0$. Una volta calcolato il punto H, definito come la proiezione ortogonale del punto $A=(8,9)$ su r', la proiezione richiesta sarà la lunghezza $\overline{OH}$. Per trovare H intersechiamo r' con la perpendicolare passante per A. Quest'ultima retta è definita dalle equazioni parametriche $(x,y)=(8,9)+t(1,-3)$, o per esteso $x=8+t$, $y=9-3t$, avendo considerato il vettore $(1,-3)$ perpendicolare a $(3,1)$, vettore direttore di r. Tale retta poteva essere definita anche attraverso un'equazione cartesiana, ma la forma parametrica accorcia la strada per risolvere il sistema. Infatti ora sostituiamo le equazioni parametriche nell'equazione di r', ottenendo $(8+t)-3(9-3t)=0$, dunque $t=\frac{19}{10}$. Infine, $H=\left(\frac{99}{10},\frac{33}{10}\right)$ e $\overline{OH}=\frac{33}{10}\sqrt{9+1}=\frac{33}{\sqrt{10}}$.

È importante notare che esiste un metodo rapidissimo per giungere alla medesima conclusione, grazie a un semplice calcolo basato sulla nozione superiore di "prodotto scalare". In alternativa, poi, questo esercizio potrebbe essere risolto calcolando la distanza di A da r' (con la nota formula) e poi applicando il teorema di Pitagora.

Es. 35. Calcolare la distanza tra il punto $(8,9)$ e la retta di equazione $y=2x-1$. Inoltre, su tale retta determinare i punti aventi distanza 10 da $(4,3)$.

Sol. $\delta=\frac{|16-9-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$. Ora, imponendo che la distanza tra (4,3) e il punto mobile $P(t)=(t,2t-1)$ sia uguale a 10, otteniamo $t_1=-2$, $t_2=\frac{34}{5}$ (in alternativa possiamo risolvere un sistema tra la retta e un'opportuna circonferenza).

Es. 36. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $y=3x-1$ e $x=3y-3$.

Sol. Possiamo considerare i due vettori direttori le cui componenti sono $(1,3)$ e $(3,1)$. Applicando la formula del coseno otteniamo

$$\cos\hat{rs}=\frac{3+3}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{3}{5}\ .$$

Poiché era richiesto l'angolo acuto, il coseno deve restare positivo (le due rette formano anche un angolo ottuso, il supplementare, col coseno cambiato di segno).

4

Geometria dello spazio

Es. 37. Stabilire se i punti $A : (-3\pi, 1, 5)$, $B : (0, 3, 5)$ e $C : (9\pi, 9, 6)$ sono allineati. Stabilire se essi sono complanari.

Sol. Tre punti sono... sempre complanari! Invece, questi non sono allineati perché formano due vettori non proporzionali (ad es. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$).

Es. 38. Stabilire se i punti $(\sqrt{2}, 2, 3)$, $(1, -1, 1)$, $(\sqrt{2}, 1, 0)$ sono allineati. Stabilire se tali punti, insieme a $(0, 0, 1)$, sono complanari.

Sol. Entrambe le risposte sono negative, poiché i vettori formati dai punti (risp. due vettori e tre vettori) sono linearmente indipendenti in entrambi i casi. In dettaglio, scegliamo $(\sqrt{2}, 2, 3)$ come punto di applicazione e consideriamo prima i vettori $(\sqrt{2}-1, 3, 2)$, $(0, 1, 3)$ (non proporzionali), poi aggiungiamo il terzo vettore $(\sqrt{2}, 2, 2)$ e notiamo che il relativo determinante non è nullo (vale $3\sqrt{2} + 4$).

Es. 39. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0, 1, 0)$, $(-1, -2, -3)$ e parallelo al vettore $(0, 2, 1)$.

Sol. Imponiamo che il piano passi per un punto e sia parallelo a due vettori (uno dei quali deve essere costruito a partire dai due punti dati):
$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, da cui si ha: $3x + y - 2z - 1 = 0$.

Es. 40. Determinare un'equazione del piano contenente l'asse x e passante per $(4, 4, 7)$.

Sol. $7y - 4z = 0$ (fascio di piani contenente la retta di equazioni $y = z = 0$, ecc. ; oppure possiamo scrivere l'equazione del piano passante per $(4, 4, 7)$ e per due punti scelti sull'asse x.)

Es. 41. Determinare e in modo che il punto $A = (1, 2, e)$ giaccia nel piano contenente l'origine e i punti $B = (1, 1, 1)$, $C = (3, 2, 1)$. Successivamente scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse y e contenente i punti B, C.

Sol. È sufficiente imporre che sia nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 2-0 & e-0 \\ 1-0 & 1-0 & 1-0 \\ 3-0 & 2-0 & 1-0 \end{vmatrix} .$$

Il valore ottenuto, $e = 3$, è in effetti tale che $(1, 2, e)$ sia una combinazione lineare di $(1, 1, 1)$ e $(3, 2, 1)$, in dettaglio $4(1, 1, 1) - (3, 2, 1)$. Notiamo che la presenza dell'origine consente di leggere questo problema nel linguaggio algebrico dei sottospazi (dobbiamo fare in modo che il vettore parametrico appartenga al sottospazio generato dai due vettori costanti).

Rispondiamo alla seconda domanda. Possiamo partire dall'equazione generale di un piano, $ax + by + cz + d = 0$, per poi imporre il passaggio per i due punti e il parallelismo con l'asse y. Otteniamo:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c + d = 0 \\ b = 0 \end{cases} .$$

Notiamo che la terza equazione esprime l'annullamento di $ax + by + cz$ — attenzione, senza la d — mediante il vettore direttore $(0, 1, 0)$ relativo all'asse y. Se per errore manteniamo la d, stiamo imponendo il *passaggio per il punto* $(0, 1, 0)$, dunque una condizione molto diversa e non richiesta: $b + d = 0$. Tornando al sistema, otteniamo la soluzione $(a, b, c, d) = (0, 0, t, -t)$ e ponendo ad es. $t = 1$ arriviamo al piano di equazione $z - 1 = 0$.

Es. 42. Descrivere con un'unica equazione cartesiana (dipendente da parametri) la totalità dei piani passanti per il punto $P = (9, 8, 7)$.

Sol. L'oggetto in esame è la cosiddetta *stella di piani* contenente il punto dato. Imponendo che l'equazione generica $ax + by + cz + d = 0$ venga soddisfatta da P otteniamo $d = -9a - 8b - 7c$; non dobbiamo introdurre ulteriori condizioni. Riorganizzando l'equazione otteniamo $a(x - 9) + b(y - 8) + c(z - 7) = 0$ e questa è in effetti una via più diretta per ottenere la risposta.

Es. 43. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente equazioni parametriche: $x = 3t - 1$, $y = 3t + 1$, $z = 8$. Stabilire se essa è contenuta nel piano $\pi : x + 1 = 0$.

Sol. $y - x - 2 = 0 = z - 8$; $3t - 1 + 1 \neq 0$ (al variare di t), quindi la retta interseca π soltanto nel punto $(-1, 1, 8)$, per $t = 0$; essa non è contenuta nel piano.

Es. 44. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(8, 2, 3)$ e parallela al vettore $(0, 3, 1)$.

Sol. Imponiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} x-8 & y-2 & z-3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Attenzione: non possiamo orlare il posto $(2, 1)$, perché contiene lo zero (otterremmo infatti due equazioni equivalenti, cioè due piani uguali che non identificano quindi una retta). Restano necessariamente i due altri minori di ordine 2, orlando ad es. il posto $(2, 2)$, con le relative equazioni $\cancel{3}(x - 8) = 0$ e $y - 3z + 7 = 0$.

Es. 45. Tra i piani passanti per $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ determinare quello parallelo alla retta $r : x - y - 5 = y + z + 4 = 0$.

Sol. Nell'equazione generica, $ax + by + cz + d = 0$, imponiamo prima il passaggio per i due punti; otteniamo: $a + b + c + d = 0$ e $c + d = 0$. Dunque $d = -c$, e $b = -a - c - d = -a$. Restano da bloccare la a e la c, nell'equazione $ax - ay + cz - c = 0$. Imponendo che si annulli il determinante della matrice incompleta del sistema retta-piano, otteniamo $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & -a & c \end{vmatrix} = 0$, cioè $c = 0$. Come accade spesso, restiamo con un parametro illusorio, qui a, che può essere fissato arbitrariamente (il piano non dipende dalle nostre scelte, ma dobbiamo evitare $a = 0$!). L'equazione finale più semplice è: $x = y$. In alternativa, possiamo scrivere l'equazione di un piano passante per due punti e parallelo a un vettore, in questo caso il vettore direttore $(1, 1, -1)$.

Es. 46. Stabilire se esistono valori di k tali che il piano $\pi : x + 2y + kz = 4$ sia parallelo alla retta $\rho : x + y - 3 = y + z - 1 = 0$ (e non la contenga).

Sol. NO, perché per nessun valore di k i due ranghi (inc. e compl.) sono diversi.

Es. 47. Determinare equazioni cartesiane, e anche parametriche, della retta passante per $(8, 0, 1)$ e parallela al vettore $(0, 10, 0)$.

Sol. $x - 8 = z - 1 = 0$; $x = 8, y = t, z = 1$.

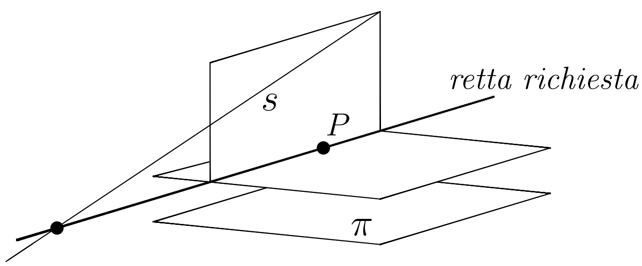
Es. 48. Scrivere equazioni parametriche della retta r passante per $A = (1,2,3)$ e $B = (3,4,-5)$. Utilizzando tali equazioni, aggiungere una condizione per descrivere parametricamente il *segmento* AB.

Sol. Poiché $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$, come equazioni parametriche possiamo utilizzare $x = 1+2t$, $y = 2+2t$, $z = 3-8t$, con $t \in \mathbf{R}$ (le equazioni parametriche dell'*intera* retta r possono essere scritte, in forma vettoriale, come $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, $\forall t \in \mathbf{R}$). Ora, l'insieme dei punti di r *compresi* tra A e B (appunto, il segmento in oggetto) si ottiene limitando la scelta di t tra 0 e 1, cioè aggiungendo alle equazioni parametriche la condizione $0 \leq t \leq 1$. Infatti, per ogni t_0 che rispetti questo vincolo, il vettore $t_0\overrightarrow{AB} = (2t_0, 2t_0, -8t_0)$ è proporzionale ad $\overrightarrow{AB}$ ed assume tutte le lunghezze possibili tra 0 e $\overline{AB}$, oltre ad avere lo stesso verso; tale vettore, sommato ad $\overrightarrow{OA}$, dà quindi un vettore $\overrightarrow{OC}$ il cui punto finale C è all'interno del segmento, arbitrariamente.

Es. 49. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P : (1,2,0)$, incidente la retta $s : x-y = y-z-1 = 0$ e parallela al piano $\pi : 3x-z = 4$.

Sol. Possiamo costruire tale retta come intersezione del piano passante per P e parallelo a π, col piano contenente s e passante per P (vedere la figura); dovremmo poi verificare che tali piani si intersechino, cioè che non siano paralleli, ma se il testo è corretto ciò non occorre, confidiamo quindi nel testo! Otteniamo: $3x-z-3 = x-z-1 = 0$. Meglio: $x-1 = z = 0$ (infatti la y è libera; la retta è parallela all'asse y e lascia la traccia $(1,0)$ sul piano xz).

(Es. 49)



Es. 50. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P(1,1,1)$, incidente l'asse z e parallela al piano di equazione $x-2y+3z-4 = 0$.

Sol. Costruiamo tale retta intersecando due piani opportuni: uno è parallelo al piano dato e passa per P, l'altro contiene l'asse z e passa sempre per P. Otteniamo: $x-2y+3z-2 = 0 = x-y$.

Es. 51. Determinare equazioni cartesiane della retta incidente le rette $r : x-1 = y-1 = 0$, $s : x+2z = y+z+1 = 0$ e passante per l'origine.

Sol. $x-y = x+2z = 0$ (si consideri il piano contenente r e passante per l'origine, insieme a quello contenente s e passante per l'origine).

Es. 52. Stabilire se il piano di equazione $x-y = 1$ è parallelo alla retta passante per l'origine e per $(1,2,3)$.

Sol. Non è parallelo, ad esempio perché il vettore $(1-0, 2-0, 3-0) = (1,2,3)$ non annulla l'equazione della giacitura.

Es. 53. Stabilire se le rette $\rho : x+y = x+z-1 = 0$, $\sigma : x+y = x-z = 0$, $\tau : 2x+y-z = y+z = 0$ giacciono in un piano comune.

Sol. SÌ (le prime due rette condividono un'equazione, quindi entrambe giacciono nel relativo piano. Inoltre il sistema tra tale piano e τ ammette ∞^1 soluzioni).

Es. 54. Determinare equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta $r : x = y - z = 0$ e distanti 1 dal punto $A(0, 0, 3)$.

Sol. Consideriamo il fascio proprio di piani di asse r, e troviamo λ, μ (a meno di un fattore di proporzionalità) imponendo che la distanza di A dal piano parametrico sia 1. Otteniamo le due equazioni: $\pm\sqrt{7}x + y - z = 0$.

Es. 55. Dopo aver verificato che le rette $r : x = z - 2 = 0$ e $s : x + y = y - 4 = 0$ sono sghembe, scrivere equazioni cartesiane della retta che le interseca perpendicolarmente.

Sol. Il determinante della matrice 4×4 completa non è nullo (oppure: i vettori direttori non sono proporzionali e le rette non si intersecano). Una volta definito il piano π contenente r e parallelo a s, la retta cercata può essere costruita come l'intersezione del piano π', contenente r e perpendicolare a π, col piano π'' contenente s e perpendicolare a π. Otteniamo intanto: $\pi : x = 0$. Ora un'equazione di π' si ottiene imponendo che il piano del fascio di equazione $\lambda x + \mu(z - 2) = 0$ abbia il vettore (a, b, c) ortogonale a $\nu_\pi = (1, 0, 0)$. Ragionando similmente per trovare π'' abbiamo infine la retta di equazioni $z - 2 = y - 4 = 0$.

Es. 56. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 4y = 9$ e il punto d'intersezione tra l'asse y e la retta di equazioni parametriche: $x = t, y = t + 1, z = t$.

Sol. $\frac{13}{\sqrt{17}}$ (il punto è $(0, 1, 0)$).

Es. 57. Stabilire se il vettore $(4, 5, 1)$ e la retta $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$ formano un angolo di 60 gradi.

Sol. NO, perché il coseno dell'angolo acuto formato da $(2, 2, 1)$ e $(4, 5, 1)$ non è uguale a $\frac{1}{2}$ (vale $\frac{19}{3\sqrt{42}}$).

Es. 58. Dopo aver verificato che le rette $r : x+y = y+z+1 = 0$, $s : x+2y+z-8 = x-z-9 = 0$ sono parallele, calcolare la loro distanza.

Sol. I ranghi della matrice 4×4 relativa alle due rette sono in effetti uguali a 2 e 3. Per trovare la distanza tagliamo le rette con un qualsiasi piano ortogonale (ad es. $x - y + z = 0$, cioè quello passante per l'origine) e calcoliamo la distanza tra i due punti di intersezione, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{35}{6}, \frac{8}{3}, -\frac{19}{6}\right)$. La distanza vale $\sqrt{\frac{91}{2}}$.

Es. 59. Tra i piani perpendicolari alla retta $r : x - y - z = x + y + z - 5 = 0$, determinare quello passante per il punto $(8, 8, 9)$.

Sol. Un metodo molto veloce per risolvere questo esercizio consiste nell'imporre semplicemente: $\begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-9 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; otteniamo l'equazione $y - z + 1 = 0$. Il piano richiesto, infatti, è parallelo ai due vettori (a, b, c) perpendicolari ai due rispettivi piani che definiscono la retta r. Un metodo apparentemente più lento consiste nel trovare un vettore direttore di r, sia esso (ℓ, m, n), per poi costruire l'equazione $\ell(x - 8) + m(y - 8) + n(z - 9) = 0$. In realtà il calcolo di (ℓ, m, n) mediante la formula dei tre determinanti di ordine 2, e il successivo calcolo dell'equazione, corrispondono esattamente allo sviluppo di Laplace lungo la prima riga, nel determinante definito prima. Dunque la complessità di calcolo è la medesima. L'unico vantaggio del secondo metodo è la maggiore facilità di calcolo di un vettore direttore di r, in certi casi, senza utilizzare la formula e trovando invece una qualunque soluzione non nulla nel relativo sistema omogeneo (giacitura).

Es. 60. Tra i piani contenenti l'asse x, determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di 45° col piano $\pi : 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

Sol. Utilizziamo il fascio di piani contenente l'asse x; esso è definito dall'equazione $\lambda y+\mu z=0$. Imponiamo che il vettore (a,b,c) di questo fascio formi un angolo di 45° o di 135° con $(2,3,-4)$:

$$\frac{|(0,\lambda,\mu)\times(2,3,-4)|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{29}}=\cos(45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Dopo alcuni calcoli otteniamo l'equazione $11\lambda^2+48\lambda\mu-3\mu^2=0$. Poniamo $\mu=1$. Ciò equivale a supporre $\mu\neq 0$, col vantaggio di poter dividere i termini dell'equazione per μ, restando con un solo parametro $\hat{\lambda}=\frac{\lambda}{\mu}$. Questa scelta è corretta perché comunque $\mu=0$ non risolve l'equazione. In alternativa possiamo risolvere l'equazione interpretando λ come incognita e μ come parametro, appesantendo i calcoli e il risultato, per poi sostituire alla fine μ con un valore, ad es. 1. Tornando all'equazione semplificata $11\lambda^2+48\lambda-3=0$, otteniamo le soluzioni $\frac{-24\pm\sqrt{609}}{11}$. Ciascuno dei due valori di λ, insieme a $\mu=1$, identifica un piano idoneo (potremmo sostituire i valori nell'equazione del fascio, ma il problema può essere considerato risolto già a questo livello).

Es. 61. Stabilire se le rette r e s, espresse in forma parametrica come $r:(2+t,-t,3)$ e $s:(t+1,t-1,2t+1)$ sono sghembe. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente la direzione perpendicolare a entrambe le rette date, e passante per $(1,2,3)$.

Sol. NO, le rette sono incidenti. Infatti, nonostante i vettori direttori non siano proporzionali, esistono valori di t e t' tali che $(2+t,-t,3)=(t'+1,t'-1,2t'+1)$. In dettaglio, $2t'+1=3\Rightarrow t'=1$, e $t=0$ rende uguali le prime due componenti (il punto comune è quindi $(2,0,3)$).

Esiste in effetti una scorciatoia elegante ed efficace: è facile convincersi che due rette sono sghembe se e solo se due loro vettori direttori *non generano* il vettore che congiunge due punti scelti arbitrariamente, uno su una retta e uno sull'altra (in altri termini, i tre vettori non sono complanari). Consideriamo allora i punti $(2,0,3)$ e $(1,-1,1)$. Essi danno luogo al vettore $(1,1,2)$. Ora,

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&1&2\end{vmatrix}=0\ ,$$

quindi le due rette non sono sghembe — non importa sapere se esse sono incidenti, parallele o coincidenti. Notiamo che due righe della matrice sono uguali; si tratta di un caso particolare causato dalla nostra scelta di $(2,0,3)$: abbiamo pescato proprio il punto d'intersezione! Tuttavia il metodo funziona ugualmente per ogni altra scelta (provare).

Un vettore perpendicolare alle due rette può essere ottenuto imponendo che il vettore generico (α,β,γ) dia un prodotto scalare nullo insieme a $(1,1,2)$ e poi insieme a $(1,-1,0)$. Otteniamo così il sistema $\alpha+\beta+2\gamma=\alpha-\beta=0$ che conduce alla soluzione $(-\gamma,-\gamma,\gamma)$, da cui preleviamo ad es. il vettore $(1,1,-1)$. Ora possiamo scrivere le equazioni richieste. Esse sono ad es. $x-y+1=y+z-5=0$. Un modo alternativo per creare un vettore idoneo è quello di effettuare il cosiddetto *prodotto vettoriale* dei due rispettivi vettori direttori: $(1,-1,0)\wedge(1,1,2)=(-2,-2,2)$.

Es. 62. In un riferimento $Oxyz$ è data la retta $r:x-y+2=2x+y+z-4=0$. Descrivere mediante un sistema di equazioni cartesiane la totalità delle rette perpendicolari a r e passanti per $P=(1,3,-1)$. Successivamente risolvere lo stesso problema con la condizione che le rette formino un angolo di 60° con r.

Sol. Le rette in questione costituiscono un fascio proprio all'interno del piano π perpendicolare a r e passante per P (notiamo che $P\in r$). È sufficiente dunque intersecare π col piano generico contenente r. Un modo per ottenere π è il seguente:

$$\begin{vmatrix}x-1&y-3&z+1\\1&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=0\ .$$

Stiamo infatti imponendo — oltre al passaggio per P — che due vettori perpendicolari a r siano paralleli al piano cercato. Possiamo anche rileggere questo determinante come $\ell(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)$, dove (ℓ,m,n) è un vettore direttore di r. Comunque, otteniamo l'equazione $x+y-3z-7=0$. Un sistema idoneo è quindi

$$\begin{cases} x+y-3z-7=0 \\ \lambda(x-y+2)+\mu(2x+y+z-4)=0 \end{cases} .$$

Come soluzione alternativa possiamo considerare le combinazioni lineari $\alpha(1,-1,0)+\beta(2,1,1)$; esse esprimono tutti i vettori perpendicolari a r. Ora scriviamo le equazioni parametriche del fascio come $(x,y,z)=(1,3,-1)+t(\alpha(1,-1,0)+\beta(2,1,1)\,)$; ogni retta del fascio corrisponde a una coppia (α,β) a meno di un fattore di proporzionalità. Infine passiamo alle equazioni cartesiane assorbendo la t: poiché $t=(z+1)/\beta$ (se $\beta\neq 0$) abbiamo:

$$\begin{cases} x=1+(z+1)\frac{\alpha}{\beta}+2z+2 \\ y=3-(z+1)\frac{\alpha}{\beta}+z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z(\gamma+2)-3-\gamma=0 \\ y+z(\gamma-1)-4-\gamma=0 \end{cases} .$$

Dobbiamo includere anche la retta di equazioni $x+y-4=z+1=0$ (caso $\beta=0$).

Il caso dell'angolo di 60° è ben diverso: se utilizziamo il primo metodo, anziché il piano perpendicolare dovremmo considerare un idoneo *cono a due falde*. Esaminiamo il metodo alternativo. I vettori direttori (p,q,r) delle rette in questione sono esattamente quelli che soddisfano la condizione

$$\frac{|(p,q,r)\times(1,1,-3)|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{11}}=\frac{1}{2} ,$$

dove $(1,1,-3)$ è un vettore direttore di r. Se $p\neq 0$ possiamo dividere per p ottenendo (da un'equazione di secondo grado) $r=r(q)$ e in conclusione la famiglia infinita di vettori direttori $(1,q,r(q))$. Ora procediamo come sopra, scrivendo $(x,y,z)=(1,3,-1)+t(1,q,r(q))$. Se $p=0$ otteniamo nuovamente $r=r(q)$ ma si tratta di infiniti vettori multipli di due soli vettori. Infatti stiamo analizzando un caso particolare rispetto agli infiniti casi ammissibili; per chiare questioni geometriche dobbiamo aspettarci due soluzioni (nota: se invece supponiamo che $r=0$ non troviamo soluzioni perché il cono a due falde interseca solo nel vertice il piano di equazione $z=0$).

Es. 63. Scrivere equazioni cartesiane della retta che interseca le rette $r: x=y=0$ e $r': x-3=z=0$ formando angoli di 60° con ciascuna retta.

Sol. Un punto mobile su r è $(0,0,t)$; un punto su r' è $(3,t',0)$. Essi sono gli estremi del vettore $\underline{v}=(3,t',-t)$. Imponiamo che $\underline{v}$ formi un angolo di 60° sia con $\underline{v}_r=(0,0,1)$ che con $\underline{v}_{r'}=(0,1,0)$. Otteniamo:

$$\frac{|-t|}{1\cdot\sqrt{9+(t')^2+t^2}}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{|t'|}{1\cdot\sqrt{9+(t')^2+t^2}}=\frac{1}{2} ,$$

da cui segue, in particolare, che $|-t|=|t'|$. Sostituendo questa identità nella seconda equazione otteniamo:

$$\frac{|-t|}{1\cdot\sqrt{9+2t^2}}=\frac{1}{2} ,$$

da cui segue che $t=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Abbiamo in tutto 4 possibilità, dunque 4 rette, al variare delle scelte dei due valori di t e t'. Le equazioni in forma cartesiana sono ad esempio $\beta x-y=\alpha x+z-3\alpha=0$, con $\alpha,\beta\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Es. 64. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'intersezione dei tre piani $\pi_1 : x-1 = 0$, $\pi_2 : x+y = 2$, $\pi_3 : y-z = 8$ e perpendicolare a π_3.

Sol. I piani hanno $(1,1,-7)$ come punto comune. Due equazioni idonee sono $x-1 = y+z+6 = 0$.

Es. 65. Tra i punti della retta $r : x+z+4 = x+y+z-1 = 0$, determinare quelli distanti 5 dal piano $\alpha : x-z = 10$, poi quelli distanti 5 dal punto $(-2,1,1)$.

Sol. Una forma parametrica di r è $(t, 5, -t-4)$. Imponendo la prima condizione si trova $t = 3 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$. Nel secondo caso si ha: $t = -2$, $t = -5$.

Es. 66. Calcolare il coseno positivo dell'angolo θ formato dall'asse x con la retta di equazione $x-3y = y-z+3 = 0$. Stabilire se θ è minore di 60 gradi.

Sol. $\cos\theta = \frac{(1,0,0)\times(3,1,1)}{\sqrt{1}\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$. Dobbiamo stabilire se $\frac{3}{\sqrt{11}} > \frac{1}{2}$, cioè se $\frac{9}{11} > \frac{1}{4}$. La risposta conclusiva è SÌ, perché $36 > 11$ (in effetti θ è anche più piccolo di 30 gradi, perché $36 > 33$).

Es. 67. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x+y = 8$ e $\pi' : x+2y-4z = 9$.

Sol. Consideriamo i vettori normali $\overrightarrow{\nu_\pi}$ e $\overrightarrow{\nu_{\pi'}}$. Otteniamo $\frac{3}{\sqrt{42}}$.

Es. 68. Determinare la distanza tra le rette (parallele) $s : x+y+2z = x-3 = 0$ e $s' : y+2z+8 = x-4 = 0$.

Sol. Il vettore $\overrightarrow{v}_s = (0,2,-1)$ può essere scelto come vettore normale di un piano che taglia le rette perpendicolarmente, ad es. il piano di equazione $2y-z = 0$. La distanza tra i punti d'intersezione di tale piano con le due rette è uguale a $\sqrt{6}$.

Es. 69. Verificare che le seguenti rette, r e s, sono parallele:

$$r : \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = 2 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x+2y+z = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Calcolare poi il coseno (≥ 0) dell'angolo formato da r col vettore $\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$.

Sol. Il rango della matrice incompleta 4×3 è uguale a 2, mentre quello della completa è uguale a 3. Oppure, i vettori direttori sono proporzionali e la condizione $y = 2$ è incompatibile con $y = 3$, quindi le rette sono parallele e non uguali. $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (notiamo che le componenti dell'ultimo vettore sono $(1,0,-3)$).

Es. 70. Scrivere un'equazione del piano passante per $(8,4,2)$ e perpendicolare sia al piano $\alpha : x = 2$ che al piano $\beta : x+y+z = 5$. Stabilire se la retta $r : x-z = y+2z+9 = 0$ è parallela a β.

Sol. $y-z-2 = 0$ (il piano richiesto è parallelo ai vettori normali dei due piani dati). r è parallela a β perché il relativo sistema non ammette soluzione.

Es. 71. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0,1,0)$ e perpendicolare al vettore $(2,4,5)$. Determinare il coseno dell'angolo formato da tale piano col piano di equazione $z = 56$, e il coseno dell'angolo formato con l'asse y.

Sol. $2(x-0)+4(y-1)+5(z-0) = 0$, cioè $2x+4y+5z-4 = 0$. $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Il calcolo del coseno dell'angolo formato con una retta (in questo caso l'asse y, di equazioni $x = z = 0$) richiede un'ulteriore operazione, poiché l'angolo formato con il vettore normale è il *complemento* dell'angolo φ che cerchiamo. Dunque $\sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{45}}$, da cui abbiamo che $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{\frac{29}{45}}$.

Es. 72. Scrivere equazioni cartesiane della retta che taglia perpendicolarmente l'asse y e la retta $r: x-y=x+y+2z+1=0$. Calcolare la minima distanza tra queste ultime due rette.

Sol. Per determinare la retta richiesta intersechiamo i due piani π, π' contenenti ciascuna delle rette date, ed entrambi perpendicolari a un piano parallelo a tali rette, ad esempio il piano contenente r e parallelo all'asse y. Un'equazione di quest'ultimo è $2x+2z+1=0$. Un'equazione di π è (utilizzando il fascio $\lambda x+\mu z=0$ e l'annullamento del prodotto scalare dei vettori normali) $x-z=0$, mentre un'equazione di π' è $2x-4y-2z-1=0$. La risposta è data dal sistema di equazioni relativo ai due piani trovati.

La minima distanza è proprio la distanza tra i punti d'intersezione delle due rette (date inizialmente) con la retta trovata. In alternativa, possiamo calcolare questa distanza come la distanza tra un *qualunque* punto dell'asse y, ad es. $(0,0,0)$, e il piano contenente r e parallelo all'asse y. Otteniamo

$$\frac{|2\cdot 0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{4+4}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\ .$$

Esiste poi un ulteriore approccio: interpretiamo la distanza come la *proiezione ortogonale* di un qualunque vettore avente un estremo sull'asse y e l'altro su r, rispetto al prodotto vettoriale di due vettori direttori. In dettaglio, un punto di r è ad es. $(0,0,-\frac{1}{2})$, mentre possiamo prendere l'origine come punto scelto sull'asse y. In questo modo il vettore da proiettare è proprio $(0,0,-\frac{1}{2})$. Il prodotto vettoriale tra $(0,1,0)$ e un vettore direttore di r, ad es. $(1,1,-1)$, è $(-1,0,-1)$. Ora abbiamo:

$$\frac{|(0,0,-\frac{1}{2})\times(-1,0,-1)|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\ .$$

Es. 73. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(1,2,4)$ e perpendicolare al piano di equazione $x+2y-3z-1=0$.

Sol. $(\ell,m,n)=(a,b,c)=(1,2,-3)$. Dunque si ha:

$$rank\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=1\ \Leftrightarrow\ 2x-y=0=3x+z-7\ .$$

Es. 74. Scrivere equazioni cartesiane delle due rette passanti per $Q=(3,5,4)$, tangenti alla sfera $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-2y-4z-20=0$ e parallele al piano $\pi: x-1=0$.

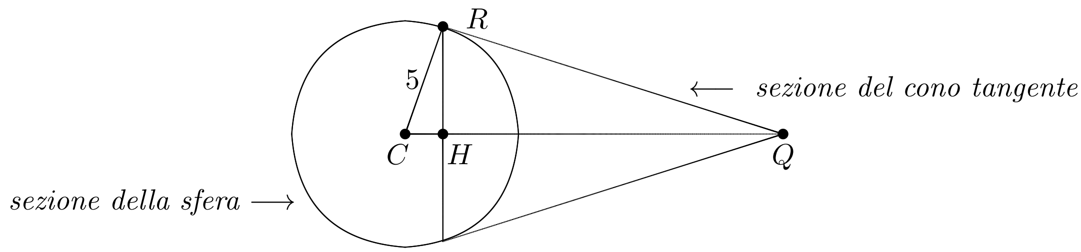
Sol. Le rette richieste sono tangenti alla sfera in due punti che possiamo calcolare mediante l'intersezione di $\mathcal{S}$ con due piani opportuni. Il primo, π_1, è il piano parallelo a π e passante per Q (in questo piano, infatti, giacciono tutte le possibili rette parallele a π e passanti per Q). Il secondo, π_2, è il piano che contiene la base del cono $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{S}$ rispetto al punto Q, vertice del cono (tale piano interseca la sfera in tutti e soli i punti di contatto delle rette tangenti ad essa e passanti per Q).

Un'equazione di π_1 è elementarmente $x-3=0$. Passando a π_2, consideriamo intanto il centro della sfera e il raggio, rispettivamente $C=(0,1,2)$ e 5. Ora, π_2 può essere ottenuto come il piano perpendicolare a $\overrightarrow{CQ}$ e passante per H, centro del cerchio di base del cono tangente $\mathcal{C}$ (vedere la figura, dove appare una sezione degli enti geometrici in esame).

Sia R un punto della circonferenza della base di $\mathcal{C}$; dal primo teorema di Euclide otteniamo: $\overline{CH}=\overline{CR}^2/\overline{CQ}=5/\sqrt{29}$. Da ciò segue che

$$H=(0,1,2)+\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overline{CQ}}=\left(\frac{75}{29},\frac{129}{29},\frac{108}{29}\right)$$

e successivamente otteniamo un'equazione di π_2: $3x+4y+2z-33=0$.



I due punti di tangenza delle rispettive rette richieste sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 20 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 33 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo: $P_1 = \left(3, \frac{17}{5}, \frac{26}{5}\right)$, $P_2 = (3, 5, 2)$, da cui seguono le equazioni delle rette:

$$r_1 : \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 3y + 4z - 31 = 0 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$$

Es. 75. Verificare che l'insieme $\{\underline{v} \in \mathbf{R}^3 \colon \underline{v} \times (7, 8, 9) = 0\}$ è un sottospazio. Determinarne la dimensione e una base.

Sol. Tale insieme è, geometricamente, una giacitura (si tratta del piano di equazione $7x + 8y + 9z = 0$), quindi è un sottospazio. Esplicitando $x = -\frac{8}{7}y - \frac{9}{7}z$ otteniamo la forma parametrica $(-8u - 9v, 7u, 7v)$ da cui otteniamo la base $\{(-8, 7, 0), (-9, 0, 7)\}$. La dimensione è chiaramente uguale a 2.

5

Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica

Es. 76. Risolvere i due seguenti sistemi, col metodo di Cramer.

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} , \quad 2 : \begin{cases} 7x = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} .$$

Sol. Osserviamo che tale metodo si può effettivamente applicare, poiché $ad - bc \neq 0$ per entrambe le matrici incomplete $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Risolviamo solo il secondo sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{7} , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{26}{7} .$$

La soluzione del primo sistema è invece $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Es. 77. Trovare tutte le eventuali soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 41y = 0 \end{cases} , \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases} , \quad 3 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

$$4 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases} , \quad 5 : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} .$$

Disegnare le corrispondenti rette, sia mediante tabelle che con lo studio del coefficiente angolare e della quota. Giustificare geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate.

Sol. 1: un solo punto, $(0, 0)$; le due rette si intersecano (nell'origine). 2: nessuna soluzione; la prima e la terza retta sono parallele ($m = -\frac{2}{3}$, quote diverse), la seconda le interseca ($m = -\frac{1}{2}$) ma in punti ovviamente distinti. 3: un punto; le tre rette hanno esattamente un punto in comune, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. 4: nessuna soluzione; le tre rette formano un triangolo. 5: infiniti punti, del tipo $(t, 3t)$, per qualsiasi scelta di $t \in \mathbf{R}$; le due rette sono in realtà la stessa retta, e la loro intersezione è dunque ancora tale retta.

Es. 78. Solo nel secondo dei due seguenti sistemi la terza equazione si può ottenere "sommando" le due equazioni superiori, preventivamente moltiplicate per certi numeri (verificarlo). Dedurne che il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ammette un'unica soluzione — è cioè "compatibile" poiché conduce all'identità $0 = 0$.

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 21 \end{cases} \qquad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 20 \end{cases} .$$

Sol. Cerchiamo, nel primo caso, due numeri p, q tali che $p(2x + 3y - 5) + q(2x - 4y - 5) = 8x - 9y - 21$. Otteniamo: $(2p + 2q)x = 8x$; $(3p - 4q)y = -9y$; $-5p - 5q = -21$, cioè

$$\begin{cases} 2p + 2q = 8 \\ 3p - 4q = -9 \\ -5p - 5q = -21 \end{cases} .$$

Tale sistema è impossibile (verificare). Invece, nel secondo caso cambia solo l'ultimo numero e otteniamo $p = 1, q = 3$. Se allora supponiamo che un punto (x_0, y_0) sia una soluzione delle prime due equazioni (in effetti la soluzione esiste ed è unica, poiché il determinante $ad - bc$ non è nullo), tale punto nel primo caso non potrà mai soddisfare la terza equazione, poiché $1 \cdot (2x_0 + 3y_0 - 5) + 3 \cdot (2x_0 - 4y_0 - 5) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, quindi $8x_0 - 9y_0 - 20 = 0$, e non possiamo rimpiazzare il 20 col 21. Nel primo caso arriveremmo infatti all'assurdo $20 = 21$, mentre nel secondo caso otteniamo il "nulla osta" dall'identità $20 = 20$. Sarebbe un grave errore trascurare il test della soluzione in tutte le altre equazioni (qui, soltanto nella terza equazione).

Es. 79. Calcolare (se esistono) tutte le soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} .$$

Interpretare tali sistemi come intersezioni di opportuni enti geometrici.

Sol. $\left(t, \frac{4}{5} - t, \frac{1}{5}\right)$ (piani incidenti), nessuna soluzione (tre piani incidenti a due a due, ma non di un unico fascio), nessuna soluzione (tre rette con diverse pendenze e non incidenti nello stesso punto), $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (tre rette di un fascio proprio).

Es. 80. Trovare tutte le soluzioni (purché ve ne siano) per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 4x + 6y + 6z = 9 \end{cases} \quad 3 : \begin{cases} 3x - 6y + w + z = 0 \\ 3y + w - 2z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Descrivere geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate, per ciascun sistema.

Sol. Il metodo della riduzione a scala è consigliato soprattutto per l'ultimo caso, in cui si ottiene una scala con tre pivot e z diventa parametro. Le tre soluzioni sono: $\left(\frac{5-3t}{2}, t, 0\right)$ (piani incidenti); impossibile (piani paralleli); $\left(\frac{t}{3}, \frac{4}{9}t, \frac{2}{3}t, t\right)$ (iperpiani incidenti in una retta — nello spazio a 4 dimensioni).

Es. 81. Dimostrare che un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango per colonne della matrice incompleta coincide col rango per colonne della completa.

Sol. Si tratta della parte esistenziale del noto teorema di Rouché-Capelli (l'altra parte riguarda invece il numero dei parametri). Se $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$ sono i vettori corrispondenti alle colonne dell'incompleta, una soluzione del sistema è precisamente una combinazione lineare $x_1\underline{v}_1 + ... + x_n\underline{v}_n = \underline{b}$, dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti (tralasciamo i simboli di trasposizione). Dunque il massimo numero di colonne linearmente indipendenti resta invariato passando da incompleta a completa. Il viceversa può essere dimostrato con lo stesso approccio.

Es. 82. Discutere i seguenti sistemi parametrici, al variare di $k \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} kx + 3y = k \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} , \quad \begin{cases} kx + 3y + 5z = 0 \\ x + 6y + 10z = 0 \end{cases} .$$

Interpretare tali sistemi come intersezione di opportuni enti geometrici, al variare di k.

Sol. Nel primo sistema, il determinante della matrice completa è uguale a $6k-27$. Se si annulla, dunque se $k = \frac{9}{2}$, si ha una, e solo una soluzione grazie al teorema di Rouché-Capelli (ranghi uguali, ecc.). Si ottengono tre rette incidenti in un punto comune. Altrimenti il sistema è impossibile (le tre rette non fanno parte di un unico fascio proprio). Il secondo sistema è omogeneo, quindi ammette almeno la soluzione $(0, 0, 0)$ comunque si scelga k. Se il rango della matrice incompleta è uguale a 1 ($k = \frac{1}{2}$) si hanno ∞^2 soluzioni (piani coincidenti); altrimenti si hanno ∞^1 soluzioni (piani incidenti).

Es. 83. Al variare di $k \in \mathbf{R}$, studiare la risolubilità del seguente sistema, in particolare specificando il numero di parametri nei casi in cui esistono soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = k \\ 2x + 4y + (k+1)z = 7 \\ kx + 10y + 17z = 19 \end{cases} .$$

Sol. La matrice completa è quella dell'Esercizio 15! Invece, la matrice incompleta era sfuggita alla nostra analisi in tale esercizio. Il suo determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & k+1 \\ k & 10 & 17 \end{vmatrix} = k^2 - 14k + 45$$

e non era stato necessario calcolarlo, visto che stavamo avvalendoci del teorema degli orlati. Ora invece tale determinante acquista un ruolo cruciale al fine della discussione del sistema mediante il confronto tra i ranghi della matrice incompleta e completa. L'equazione $k^2 - 14k + 45 = 0$ è soddisfatta intanto da $k = 5$ (non ci deve sorprendere, lo sapevamo già dall'Esercizio 15) e poi abbiamo un ulteriore valore, $k = 9$. Per questo valore di k il rango della matrice incompleta vale 2 mentre il rango della completa resta 3, quindi il sistema non ammette soluzione. Invece, per $k = 5$ i ranghi dell'incompleta e della completa coincidono e valgono 2, quindi abbiamo risolubilità con un parametro (in simboli, ∞^1 soluzioni, in dettaglio ∞^{3-2}). Infine, per tutti gli altri valori di k abbiamo entrambi i ranghi uguali a 3, con conseguente risolubilità ma senza parametri (∞^0 soluzioni, oppure possiamo scrivere $\exists!$ soluzione).

Es. 84. Determinare i valori di k che rendono privo di soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 3z = -2 \\ 7x + 3y + kz = 8 \end{cases} .$$

Sol. Possiamo utilizzare la stessa riduzione a gradini dell'Es. 17, escludendo la quarta colonna (ciò non comporta alcun cambiamento nelle operazioni elementari). Nel caso presente, tuttavia, dobbiamo imporre che il terzo pivot esista e oltretutto occupi la colonna dei termini noti. Come sappiamo, per $k = 1$ il rango della matrice incompleta non scende, dunque il terzo pivot non soddisfa la nostra richiesta. Escluso il caso $k = 1$, passiamo ora all'analisi della terza riga nella matrice M_2 privata della quarta colonna. Delle due radici di $-k^2 + 4k + 5$ soltanto $k = -1$ è idonea. Questo è pertanto l'unico valore che rende il sistema impossibile da risolvere.

Es. 85. Discutere l'esistenza di soluzioni, e il loro grado di libertà ∞^c, al variare di $U \in \mathbf{R}$, per il sistema $\begin{cases} Ux + y - z = 0 \\ 2y + Uz = U \\ x - z = 0 \end{cases}$.

Sol. Nessuna soluzione per $U = 2$, altrimenti un'unica soluzione (∞^0 soluzioni).

Es. 86. Determinare i valori reali di k che rendono risolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=k \\ x+5y=2 \\ 3x+ky=1 \end{cases} .$$

Descrivere, al variare di k, l'evoluzione delle tre rette definite dalle rispettive equazioni.

Sol. Consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & k & 1 \end{array}\right) .$$

Riduciamola a gradini nel modo più "scolastico": le prime due operazioni da effettuare sono

$$\underline{r}_2 \to 2\underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad , \quad \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \frac{3}{2}\underline{r}_1 \quad ,$$

ma in alternativa alla seconda operazione possiamo utilizzare la più comoda

$$\underline{r}_3 \to 2\underline{r}_3 - 3\underline{r}_1 \quad ,$$

con i "contrappesi". Otteniamo la nuova matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 0 & 7 & 4-k \\ 0 & 2k-9 & 2-3k \end{array}\right) .$$

Notiamo che le due operazioni possono essere effettuate in parallelo, contemporaneamente, visto che ciascuna utilizza sempre la riga $\underline{r}_1$, invariata. Ora dobbiamo azzerare il valore $2k-9$ del posto $(3,2)$ sfruttando il 7 nel posto superiore. L'operazione migliore è

$$\underline{r}_3 \to 7\underline{r}_3 - (2k-9)\underline{r}_2 \quad .$$

La matrice triangolare che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 0 & 7 & 4-k \\ 0 & 0 & \omega \end{array}\right) ,$$

dove $\omega = 7(2-3k) - (2k-9)(4-k) = 2k^2 - 38k + 50$. Il sistema sarà risolubile se e solo se $\omega = 0$. Ciò avviene per i valori

$$k = \frac{19 \pm \sqrt{261}}{2} .$$

Siamo in presenza di tre rette che hanno un'intersezione simultanea soltanto per i due valori di k appena trovati. La seconda retta è fissa; la prima varia in un fascio improprio — tutte rette parallele; la terza varia in un fascio proprio — rette aventi un punto in comune, precisamente $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ che emerge dopo aver isolato il monomio contenente k. Al variare di k le prime due rette hanno sempre un punto d'intersezione, ma deve anche accadere che la terza retta, ruotando, intercetti tale punto esattamente per lo stesso valore di k. Insomma, interpretando k come il tempo, il momento in cui le rette si incontrano deve essere lo stesso per tutte. Questo accade in effetti in due momenti precisi, come abbiamo visto, non soltanto uno.

Es. 87. Discutere i seguenti sistemi al variare di $k \in \mathbf{R}$ e descrivere le relative entità geometriche, sempre al variare di k:

$$1: \begin{cases} 2x + ky - 5k = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad ; \quad 2: \begin{cases} 2x + ky - 5 = 0 \\ 2x + 3y - k = 0 \\ 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \quad ; \; 3: \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 2x + ky = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Sol. 1: $k = 3 \Rightarrow \nexists$ sol. (rette parallele), altrimenti ∞^0 sol. (rette incidenti). 2: $k = 1 \Rightarrow \infty^0$ sol. (due rette uguali e l'altra incidente), altrimenti $\nexists$ sol. (le ultime due sono parallele); 3: $k = 2 \Rightarrow \infty^1$ sol. (tre rette uguali), altrimenti ∞^0 sol. (tre rette incidenti; se $k = -2$ due sono uguali, ma abbiamo sempre un'unica sol.).

Es. 88. Risolvere il seguente sistema; interpretare geometricamente le equazioni.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases} .$$

Sol. $\{(t, t, -2t): t \in \mathbf{R}\}$. Abbiamo studiato l'intersezione di quattro piani distinti (sono distinti perché le equazioni sono a due a due non proporzionali); poiché l'intersezione trovata è una retta, tali piani appartengono a un fascio proprio (di piani). Notiamo che l'omogeneità del sistema garantisce la sua risolubilità, ma non ci dà informazioni precise sull'insieme totale delle soluzioni. Dal punto di vista geometrico, siamo certi che il punto O appartiene al'intersezione, ma potrebbe accadere (come in effetti accade, qui) che l'intersezione sia più grande del banale punto $(0, 0, 0)$. Ciò dipende ovviamente dal rango delle matrici incompleta e completa — esso vale 2 anziché 3.

Es. 89. Determinare i valori di k (in $\mathbf{R}$) per i quali il sistema $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ ky + z = 0 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni. Interpretare geometricamente le tre equazioni, al variare di k. Infine risolvere il sistema ponendo $k = 0$.

Sol. $k = 1$. Si tratta di tre piani: due sono fissi e incidenti così da formare una retta r, il piano restante varia; se $k = 1$ quest'ultimo contiene r, altrimenti la interseca in un solo punto.

Per $k = 0$ otteniamo la soluzione $(3, 0, 0)$.

Es. 90. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

Successivamente, notando che $(1, 0, -1, 3)$ è una soluzione del sistema avente la stessa parte omogenea del precedente ma termini noti uguali rispettivamente a $4, 5, -5, 9$, dedurre la soluzione generale di quest'ultimo sistema senza effettuare ulteriori calcoli.

Sol. $\{(6t, 3t, -23t, 8t): t \in \mathbf{R}\}$; $\{(1 + 6t, 3t, -1 - 23t, 3 + 8t): t \in \mathbf{R}\}$ (per un noto teorema).

Es. 91. Utilizzando un'interpretazione geometrica, determinare tutte le soluzioni del sistema di *disequazioni* $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$.

Sol. Partiamo dalla retta r di equazione $x - y = 0$ (la bisettrice del I e III quadrante). Essa divide il piano $\mathcal{P}$ in due *semipiani*; se scegliamo un punto arbitrario (x_0, y_0) al di sopra di r, avremo che $y_0 > x_0$, cioè $x_0 - y_0 < 0$. Al di sotto di r avremo invece un risultato positivo. Quindi la prima disequazione del nostro sistema è soddisfatta da tutti i punti del semipiano inferiore a r, compresa r stessa. Nel caso della seconda equazione, notiamo che la disuguaglianza è stretta. Dobbiamo quindi considerare il semipiano inferiore alla retta s di equazione $y = -2x + 3$ (infatti per i punti di tale semipiano si ha che $y < -2x + 3$), escludendo la retta s. In questo caso parliamo di semipiano *aperto*, mentre nel primo caso il semipiano si dice *chiuso* perché contiene r. La soluzione del sistema corrisponde all'intersezione dei due semipiani. Si tratta di una porzione di $\mathcal{P}$ delimitata da r (inclusa) ed s (esclusa), il cui estremo superiore delle quote è il punto di intersezione $r \cap s$, cioè $(1, 1)$ — avendo risolto il relativo sistema di *equazioni*. Notiamo che $(1, 1)$ resta escluso, mentre ad es. $\left(1, \frac{47}{48}\right)$ è una soluzione; infatti esso soddisfa anche la seconda disequazione.

6

Applicazioni lineari, autovettori, nuove coordinate

Es. 92. Sia F l'applicazione che assegna ad ogni punto (x, y, z) dello spazio la sua *temperatura*, per ipotesi uguale a $x+2y-3z$ gradi centigradi (supponiamo, irrealisticamente, che la temperatura possa assumere qualunque valore!), e la sua *altezza*, uguale a z metri. Descrivere il luogo dei punti che hanno temperatura e altezza nulla, poi il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ, infine il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ e una fissata altezza h.

$\underline{Sol}.$ La prima domanda riguarda $ker(F)$. Esso risulta uguale a $\{(2t, -t, 0): t \in \mathbf{R}\}$, cioè $\langle(2, -1, 0)\rangle$; si tratta dell'intersezione dell'insieme dei punti a temperatura 0 (un piano) con l'insieme dei punti ad altezza 0 (un altro piano). Il secondo luogo è il piano di equazione $x + 2y - 3z = \tau$, dunque è un piano parallelo a uno dei due piani che, intersecandosi, definiscono il nucleo (una retta). Il terzo luogo è una retta parallela al nucleo, o il nucleo stesso; le sue equazioni si ottengono rimpiazzando i termini noti (nulli) del sistema omogeneo con τ e h. Ad es. i punti ad altezza 5 m e a temperatura 7° costituiscono la retta di equazioni $z - 5 = 0 = x + 2y - 3z - 7$.

Es. 93. Sia f un'applicazione lineare tra spazi vettoriali reali U e V. Presi s vettori linearmente dipendenti $\underline{u}_1$ ...,$\underline{u}_s$ nel dominio U, dimostrare che $f(\underline{u}_1)$,...,$f(\underline{u}_s)$ sono s vettori linearmente dipendenti nel codominio V. Dimostrare, poi, che la stessa proprietà relativamente all'*indipendenza* lineare vale solo se f è iniettiva.

$\underline{Sol}.$ Si tratta di una ben nota proprietà. Nel primo caso, per ipotesi sappiamo che $\sum_{1\le i\le s} \alpha_i\underline{u}_i = 0$ per certi coefficienti α_i non tutti nulli. Grazie alla linearità, abbiamo: $\underline{0} = f(\underline{0}) = f(\sum_{1\le i\le s} \alpha_i\underline{u}_i) = \sum_i \alpha_i f(\underline{u}_i)$, quindi sussiste la dipendenza lineare. Invece, se per ipotesi esistono coefficienti β_i tali che $\sum_i \beta_i f(\underline{u}_i) = \underline{0}$, utilizzando la linearità possiamo solo affermare che $\sum_i \beta_i\underline{u}_i \in Ker(f)$. Se però in aggiunta abbiamo l'iniettività, il nucleo si riduce al solo zero, quindi $\sum_i \beta_i\underline{u}_i = \underline{0}$ e, dato che gli $\underline{u}_i$ sono linearmente indipendenti, $\beta_i = 0$ per ogni i. Notiamo che l'iniettività fa sì che la dimensione dell'immagine sia *uguale* a quella del dominio. Quindi non è possibile che vettori linearmente indipendenti siano trasformati in vettori dipendenti, perché altrimenti la dimensione dell'immagine diminuirebbe (...).

Es. 94. Due spazi vettoriali U, V si dicono *isomorfi* se esiste un'applicazione lineare $\varphi : U \longrightarrow V$ che sia anche biunivoca (φ è detta un *isomorfismo*). Dimostrare che in presenza di un isomorfismo U e V hanno la stessa dimensione (supporre che la dimensione di U non sia infinita).

$\underline{Sol}.$ Data una base di U, sia essa $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m\}$, per un noto teorema l'immagine di una data applicazione lineare f è generata da $\{f(\underline{u}_1), ..., f(\underline{u}_m)\}$. Ora, dalla suriettività di φ segue che $Im(\varphi) = V$, quindi gli m vettori $\varphi(\underline{u}_i)$ sono sufficienti per generare V. Resta da dimostrare l'indipendenza lineare di queste m immagini. Supponendo che $\sum_i \alpha_i\varphi(\underline{u}_i) = \underline{0}$, in virtù della linearità abbiamo che $\varphi(\sum_i \alpha_i\underline{u}_i) = \underline{0}$. Dunque $\sum_i \alpha_i\underline{u}_i \in Ker(\varphi)$ ma l'iniettività implica che il nucleo consiste solo dello zero. Di conseguenza $\sum_i \alpha_i\underline{u}_i$ è uguale allo zero di U; ora l'indipendenza lineare degli $\underline{u}_i$ costringe gli α_i ad essere tutti nulli.

Es. 95. Esibire un isomorfismo tra lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti reali e quello delle matrici triangolari superiori di ordine 3 a valori reali, descrivendo esplicitamente le immagini di una data base del dominio.

$\underline{Sol}.$ Si tratta di due spazi di dimensione 6, dunque intrinsecamente isomorfi; per esplicitare un isomorfismo occorre però definirlo nei dettagli, decidendo quali devono essere le immagini dei

6 vettori di una fissata base del dominio. Come base dello spazio di polinomi possiamo utilizzare $\{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$; scegliamo poi una base del codominio, considerando le matrici M_1, M_2, ... , M_6 che hanno tutti zeri ad eccezione di un solo 1 situato rispettivamente nel posto $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$. Definiamo ora l'isomorfismo ψ mediante

$$\psi(t^i) := M_{i+1} \quad , \; 0 \leq i \leq 5 \; .$$

L'esercizio può terminare qui, visto che automaticamente, senza altri calcoli o definizioni, possiamo *estendere ψ per linearità* a tutto il dominio dei polinomi in esame. Giusto come esempio, l'immagine di $t^4 - 3t + \sqrt{53}$ è $\psi(t^4 - 3t + \sqrt{53}) = \psi(t^4) - 3\psi(t) + \psi(\sqrt{53}) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{53} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{53} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La comodità e la potenza delle applicazioni lineari risiedono soprattutto nella possibilità di descrivere e gestire una funzione mediante la sola conoscenza di un numero finito di dati relativi alle immagini di una base.

Es. 96. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica di $\mathbf{R}^2$ alla base $\mathcal{A} = \{(1,2), (3,8)\}$, e la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (2,1,0), (1,1,1)\}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Sol. Ciascuna colonna deve recare le coordinate del rispettivo vettore della base di partenza, scritte rispetto alla base di arrivo. Possiamo risolvere ogni volta un sistema, oppure (nel primo caso, non così elementare) utilizziamo la matrice inversa di quella del cambiamento di coordinate contrario. Le due matrici richieste sono le seguenti:

$$\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es. 97. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{A} = \{(1,2), (1,-1)\}$ alla base $\mathcal{A}' = \{(2,3), (4,1)\}$.

Sol. Possiamo risolvere due sistemi, al fine di calcolare le coordinate dei vettori di $\mathcal{A}$ rispetto alla base $\mathcal{A}'$; in alternativa, possiamo pensare al presente cambiamento di coordinate come a un doppio processo: prima passiamo da $\mathcal{A}$ alla base canonica, poi dalla canonica ad $\mathcal{A}'$. Il tutto si traduce nel prodotto di due opportune matrici (attenzione all'ordine: il primo processo va scritto a destra, per accogliere l'input iniziale, cioè le coordinate $(x,y)^t$ nella base $\mathcal{A}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Es. 98. Determinare una base del nucleo, una dell'immagine, e le due rispettive dimensioni, per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x,y,z) = (x + 3y + 4z, 2x + 6y + 8z)$. Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Determinare i vettori $\underline{u} \in \mathbf{R}^3$ tali che $f(\underline{u}) = (5,10)$, cioè calcolare la controimmagine $f^{-1}(5,10)$. Tenendo presente l'Es. 96, scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{A}$ nel codominio, e successivamente scrivere la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ nel dominio e ad $\mathcal{A}$ nel codominio.

Sol. Si può utilizzare, come strumento di lavoro, la matrice di f rispetto alle due basi canoniche, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 1, quindi $dim(Im(f)) = 1$ e $dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2$.

Una base del nucleo può essere calcolata mediante il sistema omogeneo $f(x, y, z) = (0, 0)$. Si hanno ∞^2 soluzioni, del tipo $\left(s, t, -\frac{s+3t}{4}\right)$, e in particolare una base è $\{(4, 0, -1), (0, 4, -3)\}$. Una base dell'immagine è costituita da un solo vettore; basta scegliere una colonna qualsiasi della matrice; f non è né iniettiva né suriettiva. La controimmagine di $(5, 10)$ è $\left(s, t, \frac{5-s-3t}{4}\right)$, per ogni scelta di s, t. Le due matrici richieste alla fine si possono ottenere ad es. mediante opportuni prodotti con le matrici del cambiamento di coordinate dell'Es. 96. Il risultato finale è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es. 99. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ tale che $g(1, 0) = (1, 2, 3, 4)$ e $g(0, 1) = (-1, -2, -3, -4)$. Stabilire se l'immagine di g è l'intero codominio $\mathbf{R}^4$. Infine, scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{(2, 1), (2, 3)\}$ del dominio e alla base canonica del codominio, e calcolare $g(8, 6)$ utilizzando tale matrice.

Sol. $Ker(g) = \{(t, t) \colon t \in \mathbf{R}\} = \langle(1, 1)\rangle$. NO, perché g non è suriettiva. La nuova matrice, sia essa M, è identica a quella rispetto alle basi canoniche (in questo esercizio particolare). Poiché $(8, 6) = 3 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (2, 3)$, utilizzando le nuove coordinate di $(8, 6)$ si ha: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Es. 100. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $f(8, 9) = (8, 9)$ e che $f(9, 10) = (9, 10)$. Dimostrare che f è l'applicazione identità, cioè che $f(\underline{u}) = \underline{u}$ per ogni $\underline{u}$.

Sol. Sia $\underline{u}$ un vettore del dominio. Poiché esistono numeri α e β tali che $\underline{u} = \alpha(8, 9) + \beta(9, 10)$ (i due vettori formano infatti una base), abbiamo: $f(\underline{u}) = f(\alpha(8, 9) + \beta(9, 10)) = \alpha f(8, 9) + \beta f(9, 10) = \alpha(8, 9) + \beta(9, 10) = \underline{u}$ (il secondo "=" è lecito in virtù della linearità).

Es. 101. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $f(1, 2) = (8, 9)$ e che $f(3, 4) = (16, 18)$. Calcolare una base di $Ker(f)$.

Sol. Risolvendo il sistema $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ otteniamo $(x_1, x_2) = (-2t, t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Queste però sono coordinate rispetto a una base *non canonica* del dominio! Infatti la matrice è ibrida, perché è definita mediante la base $\{(1, 2), (3, 4)\}$ nel dominio e mediante la base canonica nel codominio. Per trovare le vere soluzioni vettoriali dobbiamo associare tali coordinate ai vettori della base, ottenendo $-2t(1, 2) + t(3, 4)$, cioè $(t, 0)$. Una base del nucleo è dunque costituita dal vettore $(1, 0)$.

Es. 102. Sia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ una fissata base di uno spazio vettoriale U e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Di un'applicazione lineare $f : U \to V$ è noto che $f(\underline{u}_1) = \underline{0}_V$ e $f(\underline{u}_2) = f(\underline{u}_3) = \underline{v}$ dove $\underline{v}$ è un certo vettore di V, diverso dallo zero. Descrivere la controimmagine di $\underline{v}$. Stabilire se f è suriettiva. Esibire una base del nucleo di f.

Sol. Imponiamo che il vettore generico di U, che possiamo scrivere come $\sum\limits_{1 \le i \le 3} a_i \underline{u}_i$, abbia l'immagine richiesta:

$$\underline{v} = f\Big(\sum_{1 \le i \le 3} a_i \underline{u}_i \Big) = \sum_{1 \le i \le 3} a_i f(\underline{u}_i) = (a_2 + a_3)\underline{v} \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_3 = 1 .$$

L'insieme $f^{-1}(\underline{v})$ è dunque costituito da tutti i vettori della forma $s\underline{u}_1 + t\underline{u}_2 + (1-t)\underline{u}_3$ con $s, t \in \mathbf{R}$.

La suriettività è compromessa perché l'immagine ha dimensione 1 (essa è infatti il sottospazio $\langle \underline{0}, \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v} \rangle \subset V$). Un calcolo simile a quello già effettuato — sostituendo lo zero $\underline{0}_V$ al posto di $\underline{v}$ — mostrerebbe che i vettori del nucleo sono della forma $s\underline{u}_1 + t\underline{u}_2 - t\underline{u}_3$; ciò consente di esibire ad esempio la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2 - \underline{u}_3\}$ del nucleo.

Es. 103. Siano U e V due spazi vettoriali le cui basi sono state scelte come $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia data l'applicazione lineare $f : U \to V$ tale che $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$ e $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_1 + 5\underline{v}_2$. Determinare un vettore di V che non abbia controimmagine secondo f.

Sol. Costruiamo la matrice di f rispetto alle basi date, ponendo in colonna le coordinate delle immagini della base di U scritte rispetto alla base di V. Otteniamo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} .$$

È sufficiente trovare un vettore numerico che posto in colonna aumenti il rango di M. Osservando che il minore di ordine 2 in alto è diverso da zero, possiamo semplicemente aggiungere la colonna $(0, 0, 1)^t$. Attenzione! Ora occorre leggere il vettore numerico (le coordinate) $(0, 0, 1)$ nella base assegnata per V. La risposta corretta è dunque $0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 1\underline{v}_3$, cioè il vettore $\underline{v}_3$.

Es. 104. Dimostrare che l'insieme delle applicazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$, sia esso $\mathcal{L}_3^2$, munito delle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare, è uno spazio vettoriale. Esibirne una base (essa consiste di 6 elementi).

Sol. Dimostriamo che $\mathcal{L}_3^2$ è un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni (non necessariamente lineari) da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$ munito delle medesime operazioni (vedere l'Es. 23 ponendo $T = \mathbf{R}^3$ e $V = \mathbf{R}^2$).

Date f, g lineari, l'applicazione $f + g$ mantiene la proprietà di essere lineare. Infatti per ogni scelta di vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ in $\mathbf{R}^3$ e di numeri reali r, s, abbiamo:

$$(f + g)(r\underline{u} + s\underline{v}) = f(r\underline{u} + s\underline{v}) + g(r\underline{u} + s\underline{v}) = rf(\underline{u}) + sf(\underline{v}) + rg(\underline{u}) + sg(\underline{v}) =$$

$$= r(f + g)(\underline{u}) + s(f + g)(\underline{v}) .$$

Il primo e l'ultimo "=" seguono direttamente dalla definizione di $\alpha f + \beta g$, mentre il secondo "=" è la chiave di volta del calcolo perché sfrutta le ipotesi di linearità di f e di g. Anche la seconda proprietà della linearità risulta valida. Infatti:

$$(\alpha f)(r\underline{u} + s\underline{v}) = \alpha f(r\underline{u} + s\underline{v}) = \alpha(rf(\underline{u}) + sf(\underline{v})) =$$

$$= \alpha rf(\underline{u}) + \alpha sf(\underline{v}) = r(\alpha f)(\underline{u}) + s(\alpha f)(\underline{v}) .$$

Similmente, in questo caso il secondo "=" è il punto cruciale del calcolo.

La dimensione di $\mathcal{L}_3^2$ vale 6. Per vederlo, introduciamo intanto i simboli $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2\}$ per le basi canoniche del dominio e del codominio. Ora una base di $\mathcal{L}_3^2$ è data ad esempio dalle 6 applicazioni lineari $\varphi_{i,j} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 2$, definite mediante l'effetto sulla base canonica del dominio, come segue:

$$\varphi_{i,j}(\underline{e}_t) := \underline{0} \text{ se } t \neq i \quad , \quad \varphi_{i,j}(\underline{e}_i) := \underline{e}'_j .$$

Queste sei funzioni sono sufficienti per *generare* qualunque applicazione lineare h da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$. Infatti per ciascun indice $i \in \{1, 2, 3\}$, $h(\underline{e}_i)$ è un vettore di $\mathbf{R}^2$ e sarà quindi possibile esprimerlo come $q_{i,1}\underline{e}'_1 + q_{i,2}\underline{e}'_2$ per certi numeri reali $q_{i,1}$, $q_{i,2}$. Ebbene, al variare di i le tre coppie di numeri reali $q_{i,j}$ danno forma a una precisa applicazione lineare $q_{1,1}\varphi_{1,1} + q_{1,2}\varphi_{1,2} + q_{2,1}\varphi_{2,1} + ...$, in sintesi

$$\sum_{1 \le i \le 3 \, , \, 1 \le j \le 2} q_{i,j}\varphi_{i,j} \ ,$$

che ha su $\underline{e}_i$ lo stesso effetto di h (verificare). Per un noto teorema, due applicazioni lineari sono uguali se hanno lo stesso effetto sui vettori di una base fissata.

Le sei funzioni generatrici sono anche *linearmente indipendenti*, perché supponendo che

$$\sum_{1\le i\le 3, 1\le j\le 2} z_{i,j}\varphi_{i,j} = \bigcirc$$

per certi numeri reali $z_{i,j}$ (con $\bigcirc$ denotiamo la funzione identicamente nulla, quella tale che $\bigcirc(\underline{u}) = \underline{0}\,\forall \underline{u} \in \mathbf{R}^3$, con $\underline{0} \in \mathbf{R}^2$), allora in particolare

$$\underline{0} = \bigcirc(\underline{e}_I) = \sum_{1\le i\le 3, 1\le j\le 2} z_{i,j}\varphi_{i,j}(\underline{e}_I) = \sum_{1\le j\le 2} z_{I,j}\underline{e}'_j \quad (I \in \{1,2\})$$

e l'indipendenza lineare di $\underline{e}'_1$ e $\underline{e}'_2$ forza $z_{I,j}$ ad essere nullo, per ciascun indice j.

Es. 105. Sia data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(x,y) = (3x+y, 3y)$. Calcolare i vettori del nucleo di f. Stabilire se f è suriettiva e se è diagonalizzabile. Calcolare $f^{-1}(0,10)$. Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\{(1,1),(2,1)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Sol. $Ker(f) = \{\underline{0}\}$; suriettiva; non diagonalizzabile (l'unico autovalore, $\lambda = 3$, ha la molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica); $(-\frac{10}{9}, \frac{10}{3})$; $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Es. 106. Data l'applicazione lineare $\ell : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$, determinare una base di autovettori che diagonalizzi ℓ. Scrivere la conseguente matrice diagonale, senza calcolare prodotti di matrici.

Sol. Le radici del polinomio caratteristico sono 0, 1, 2. Una base formata dai rispettivi autovettori è $\{(1,0,5),(1,0,4),(1,1,-2)\}$. La conseguente matrice diagonale ha i tre autovalori ordinati sulla diagonale principale.

Es. 107. Calcolare una base di autovettori dell'applicazione lineare definita, mediante le basi canoniche del dominio e del codominio ($\mathbf{R}^3$), dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere anche il relativo prodotto di matrici che diagonalizza A, e scrivere la matrice diagonale risultante.

Sol. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Gli autovettori sono le colonne della matrice a destra nel prodotto. La prima matrice del prodotto è la sua inversa.

Es. 108. Trovare le eventuali matrici diagonalizzabili tra le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol. Le prime due matrici sono diagonalizzabili in virtù del teorema spettrale. L'ultima matrice non è diagonalizzabile con numeri reali, poiché ha autovalori complessi non reali.

Es. 109. Sia data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+3y+z, 3x+y+2z)$. Calcolarne: la controimmagine di $(4,3,5)$, gli autovalori e almeno un autovettore (nota: un autovalore è uguale a 6). Stabilire se, rispetto a una certa base nel dominio e nel codominio, è vero che $f(X,Y,Z)$ si scrive nella forma $(\alpha X, \beta Y, \gamma Z)$.

Sol. $f^{-1}(4,3,5)=(1,0,1)$. Un autovettore relativo a $\lambda=6$ è $(1,1,1)$. Gli altri autovalori sono $\pm\sqrt{3}$ (si utilizzi il metodo di Ruffini, essendo nota una radice del polinomio caratteristico). Per $\lambda=\sqrt{3}$ un autovettore è $\big(3\sqrt{3}-7,\sqrt{3}+5,2-4\sqrt{3}\big)$, ecc. Scegliendo un'opportuna base, formata da autovettori, si ha: $f(X,Y,Z)=\big(6X,\sqrt{3}Y,-\sqrt{3}Z\big)$.

Es. 110. Calcolare una base di autovettori (soltanto due) dell'applicazione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita da $f(1,0,0)=(3,0,0)$, $f(0,1,0)=(4,1,-2)$, $f(0,0,1)=(-4,2,5)$. Introdurre poi un vettore perpendicolare alla base trovata e scrivere la matrice di f rispetto alla base estesa (sia nel dominio che nel codominio).

Sol. Determiniamo intanto gli autovalori:

$$-\begin{vmatrix} 3-s & 4 & -4 \\ 0 & 1-s & 2 \\ 0 & -2 & 5-s \end{vmatrix} = s^3-9s^2+27s-27=0\ .$$

Potremmo utilizzare il metodo di Ruffini, ma notiamo che il polinomio è uguale al cubo di $(s-3)$. Esiste quindi un solo autovalore, $s=3$, con molteplicità algebrica 3 (il grado del polinomio). Esso ha una "grossa responsabilità" perché spetta soltanto a lui la creazione di autovettori...

Sostituendo $s=3$ nella matrice e risolvendo il relativo sistema, otteniamo 2 parametri (il rango scende a 1; non possiamo chiedergli di scendere addirittura a zero!): l'autospazio è un piano definito dall'equazione $y-z=0$. Gli autovettori sono dunque tutti e soli i vettori della forma (α,β,β). Scegliamo $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$ come base di autovettori ed estendiamola a una base di $\mathbf{R}^3$ mediante il vettore normale $(0,1,-1)$. Abbiamo infine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

Notiamo che il blocco di ordine 2 in alto a sinistra è una matrice diagonale — è il massimo che si possa chiedere, non potendo diagonalizzare l'intera matrice!

Es. 111. Esibire una base di autovettori per l'applicazione $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ che trasforma i tre vettori ordinati della base canonica rispettivamente in $(0,0,0)$, $(0,0,0)$, $(5,6,7)$. È possibile esibire una base ortogonale?

Sol. Potremmo costruire e studiare la matrice di f rispetto alle basi canoniche del dominio e anche del codominio, ma in alternativa osserviamo che il nucleo di f è il sottospazio $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$; dunque disponiamo già di una base dell'autospazio di $\lambda=0$. Il secondo autospazio non è altro che $\langle(5,6,7)\rangle=Im(f)$ (interpretiamo $Im(f)$ come un sottospazio del dominio, non del codominio). Infatti il processo trasforma lo spazio nella retta r di equazioni parametriche $(x,y,z)=t(5,6,7)$, quindi i vettori che mantengono la propria direzione sono tutti e soli quelli che già nel dominio erano diretti come r. Insomma, se comincia a piovere in una piazza affollata, il processo della pioggia trasforma ogni oggetto o persona asciutta in una entità bagnata, ma l'acqua della vasca della fontana non viene trasformata perché era bagnata in partenza! Quell'acqua è rimasta se stessa, a meno di un fattore (forse il livello è salito...).

Non è possibile trovare una base ortogonale perché il terzo autovettore dovrebbe essere proporzionale a $(0,0,1)$.

Es. 112. Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché (dimostrare) è possibile trovare una matrice R tale che

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D \ ,$$

utilizzando l'identità inversa $M = RDR^{-1}$ calcolare M^{10}.

Sol. La matrice R può essere costruita ponendo in colonna tre autovettori linearmente indipendenti per l'applicazione rappresentata da M rispetto alle basi canoniche. Ad esempio,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ora notiamo che ad es.

$$M^3 = (RDR^{-1})(RDR^{-1})(RDR^{-1}) = RDR^{-1}RDR^{-1}RDR^{-1} = RD^3R^{-1} \ .$$

Nel nostro caso quindi abbiamo:

$$M^{10} = (RDR^{-1})^{10} = RD^{10}R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

e, per ogni intero positivo q, una matrice diagonale elevata alla q è semplicemente la matrice diagonale con i rispettivi valori elevati alla q (esercizio). In conclusione abbiamo:

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{10} \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 1 & 2^{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{10} & 2 \cdot 3^{10} - 2 & 1 - 3^{10} \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{11} - 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Es. 113. Di un'applicazione lineare g è noto che $g(1,2) = (1,2)$ e che $(2,-1)$ è un autovettore con relativo autovalore uguale a 3. Calcolare $g(1,0)$ e $g(0,1)$. Stabilire se g è suriettiva e se è biunivoca.

Sol. La seconda ipotesi equivale a $g(2,-1) = (6,-3)$. Poiché $(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1)$ (sistema...) abbiamo che $g(1,0) = \frac{1}{5}g(1,2) + \frac{2}{5}g(2,-1) = \left(\frac{13}{5}, -\frac{4}{5}\right)$; similmente, $g(0,1) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$. In alternativa si può effettuare un opportuno prodotto di matrici. Sussiste la suriettività, e quindi la biiettività, perché le immagini dei due vettori (che formano una base) sono linearmente indipendenti.

Es. 114. Di una funzione f definita da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ è noto che $f(2,3) = f(3,4) = f(5,6) = (1,0,0)$. Possiamo essere certi che questa funzione è lineare? Possiamo essere certi che questa funzione non è lineare? Essa, più debolmente, *potrebbe* essere lineare anche se non è sicuro che lo sia?

Sol. Un'applicazione lineare dipende dall'effetto sui vettori di una base qualunque del dominio. Consideriamo la base $\mathcal{B} = \{(2,3),(3,4)\}$. Se f fosse lineare, dopo aver trovato le coordinate $-2, 3$

di $(5,6)$ rispetto a $\mathcal{B}$ saremmo autorizzati a dedurre (senza leggere affatto il testo dell'esercizio!) che $f(5,6) = -2f(2,3) + 3f(3,4) = (-2,0,0) + (3,0,0) = (1,0,0)$. Dunque non troviamo una contraddizione col testo dell'esercizio e f, in definitiva, potrebbe essere lineare. Non è sicuro che f lo sia veramente, perché non conosciamo il comportamento di f su tutto il dominio ma solo su un vettore diverso dai due vettori della base. Se ad esempio come ulteriore informazione sapessimo che $f(4,6) = (1,0,0)$ anziché $(2,0,0)$, la linearità sarebbe compromessa. Avremmo trovato un difetto. Invece non sappiamo nulla su f, al di fuori dei dati del testo. In conclusione, avendo trovato una condizione necessaria ma non sufficiente per la linearità, possiamo soltanto dire che f ha superato uno degli infiniti test e potrebbe essere lineare.

Es. 115. Stabilire se $(1,3,0)$ è un autovettore per l'applicazione lineare g di cui è noto che $g(1,1,0) = (2,2,0)$ e $g(0,1,0) = (0,2,0)$.

Sol. Poiché $(1,1,0)+(0,2,0) = (1,3,0)$, abbiamo: $g(1,3,0) = g(1,1,0)+g(0,2,0) = g(1,1,0)+2g(0,1,0) = (2,2,0) + (0,4,0) = (2,6,0)$; quindi siamo in presenza di un autovettore con relativo autovalore $\lambda = 2$.

Es. 116. Sia M una matrice simmetrica di ordine n e sia R una matrice le cui colonne sono autovettori di M a due a due ortogonali e di modulo 1, intendendo M come la matrice di un'applicazione lineare secondo una base fissata nel dominio e nel codominio che sono uguali a $\mathbf{R}^n$ (dunque $R^{-1}MR$ è una matrice diagonale che reca i vari autovalori con le rispettive molteplicità). Dimostrare che in effetti $R^{-1} = R^t$ (questa proprietà fa di R una matrice *ortogonale*; come approfondimento, vedere l'Es. 160).

Sol. Ricordiamo che l'esistenza di una base ortogonale di autovettori per M è garantita dal teorema spettrale. Possiamo sempre normalizzare tali vettori. Una base "ortonormale" sia dunque $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$. Dimostriamo ora facilmente che $R^tR = I_n$, notando che il prodotto scalare della i-esima riga di R^t con la j-esima colonna di R è uguale a $\underline{v}_i \times \underline{v}_j$, dunque è uguale a 1 se $i = j$ e vale 0 negli altri casi. Necessariamente R^t è l'inversa di R, poiché si comporta appunto come l'inversa, e l'inversa è unica (Es. 7).

Es. 117. Dimostrare il teorema spettrale nel caso di matrici simmetriche di ordine 2.

Sol. Partiamo dalla generica matrice simmetrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ che interpretiamo come la matrice di un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ definita rispetto alla base canonica, sia nel dominio che nel codominio. Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$. Otteniamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \ .$$

Supponendo $a \neq c$ oppure $b \neq 0$ otteniamo due soluzioni reali distinte (il discriminante è infatti positivo). Il calcolo di due rispettivi autovettori è molto semplice, nel caso di una matrice di ordine 2: per ogni fissato autovalore sappiamo che il rango del relativo sistema vale 1, quindi è sufficiente risolvere la prima equazione. Così otteniamo ad esempio i vettori $(b, \lambda_1 - a)$ e $(b, \lambda_2 - a)$. Essi sono ortogonali. Calcolando infatti il loro prodotto scalare otteniamo

$$(b, \lambda_1 - a) \times (b, \lambda_2 - a) = b^2 + a^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2)$$

e ricordando che la somma delle radici e il prodotto delle radici di una data equazione sono uguali rispettivamente all'opposto del coefficiente di λ e al termine noto (per una nota proprietà delle equazioni di secondo grado), abbiamo che

$$b^2 + a^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) = b^2 + a^2 + ac - b^2 - a(a+c) = 0 \ .$$

Supponiamo invece che $a = c$ e che $b = 0$. In questo caso particolare la matrice simmetrica diventa una matrice diagonale con due valori uguali sulla diagonale. I suoi autovettori sono tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ escluso $(0, 0)$. È quindi immediato selezionare due qualunque vettori ortogonali.

7

Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi

Es. 118. Determinare gli eventuali valori di a che rendono linearmente dipendenti i vettori $(a,1,0,0)$, $(1,a,1,0)$, $(1,1,2,a)$. Scrivere una o più equazioni cartesiane (essenziali) del sottospazio generato da tali vettori per $a=2$.

Sol. Non esistono valori con tale proprietà; applicando infatti il teorema degli orlati con la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ di $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, otteniamo le condizioni incompatibili $2a^2-a-1=0=a^2$, nel tentativo di abbassare il rango da 3 a 2. Per $a=2$ il sottospazio in questione ha dimensione 3; una sua equazione è

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \ .$$

Es. 119. Calcolare il rango delle matrici

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Determinare quindi la dimensione, una base ed equazioni cartesiane del sottospazio generato dalle colonne di T, e poi da quelle di U.

Sol. Le dimensioni sono uguali ai ranghi, in ogni caso. $rank(T)=3$. Base: ad es. $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$. Il sottospazio generato da tali colonne è l'insieme dei vettori (x,y,w,z) che rendono nullo il determinante $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 3 & x \\ 0 & 4 & 0 & y \\ 0 & 5 & -1 & w \\ 0 & 9 & -1 & z \end{vmatrix}$ (questa è infatti una condizione equivalente alla dipendenza lineare delle 4 colonne). Otteniamo così un'equazione che descrive il sottospazio: $y+w-z=0$. Analogamente, per U (che ha dimensione 2) abbiamo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$. Otteniamo: $x-y=0$. Notiamo che questo esercizio ricorda molto il calcolo di un'equazione di un piano passante per l'origine e parallelo a due vettori (o a tre vettori, se siamo in uno spazio a 4 dimensioni).

Es. 120. Scrivere un insieme minimale di equazioni cartesiane di $T = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,2), (0,0,2,4), (1,1,-1,-2) \rangle$.

Sol. Possiamo ridurre a scala la matrice di tipo 4×4 che ha i 4 vettori per righe, scoprendo che in effetti i primi due sono sufficienti, e necessari, per generare T. Per facilitare i nostri calcoli, a ben vedere, possiamo considerare il primo e il terzo vettore: essi sono linearmente indipendenti e pertanto generano sempre T. A questo punto imponiamo che

$$rank \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \ ,$$

cioè imponiamo che il vettore generico $\underline{x}$ appartenga al sottospazio T, sia cioè generato dai due stessi vettori che generano T. Orliamo la sottomatrice inferiore centrale di tipo 2×2, ottenendo le due condizioni

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \\ x_4 = 2x_3 \end{cases}.$$

Notiamo che potremmo aggiungere altre equazioni (se non conoscessimo il teorema degli orlati...), imponendo l'annullamento di ulteriori minori, ma produrremmo soltanto un'informazione ridondante — le equazioni aggiunte sarebbero combinazioni lineari delle due già presenti. Non possiamo, invece, rinunciare ad alcuna delle due equazioni già trovate.

Es. 121. Dimostrare che cinque vettori a due a due ortogonali di $\mathbf{R}^5$, non nulli, costituiscono una base di tale spazio vettoriale.

Sol. Supponiamo che $\sum_{1 \le i \le 5} \alpha_i \underline{w}_i = \underline{0}$. Per ogni indice H fissato, si ha: $\underline{w}_H \times \sum_{1 \le i \le 5} \alpha_i \underline{w}_i = (...) = \sum_i \alpha_i (\underline{w}_i \times \underline{w}_H) = \alpha_H (\underline{w}_H \times \underline{w}_H) = \alpha_H w_H^2$; d'altra parte tale prodotto scalare è nullo. Quindi α_H risulta necessariamente nullo, per ciascun H. Siamo in presenza di 5 vettori linearmente indipendenti, quindi abbiamo una base (in virtù di un noto teorema sulla dimensione: le basi di uno spazio vettoriale hanno tutte la stessa cardinalità, purché essa sia finita).

Es. 122. Stabilire se esistono valori di h (in $\mathbf{R}$) per i quali i vettori (h, h, h, h), $(h, 1, 0, -1)$, formano una base ortogonale (di un sottospazio 2-dimensionale di $\mathbf{R}^4$).

Sol. L'ortogonalità implica che $h = 0$ (utilizzare il prodotto scalare), quindi un vettore si annulla e NON è possibile ottenere una base.

Es. 123. Determinare una base ortogonale del sottospazio $W = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 1, 2, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$. Estenderla poi a una base di $\mathbf{R}^4$ (non necessariamente ortogonale).

Sol. Possiamo affrontare subito la seconda parte dell'esercizio; infatti, trovando un vettore che non è generato dai tre vettori dati, siamo certi che nessun'altra base di W (come ad esempio quella ortogonale che produrremo) potrà generare $\underline{v}$. Utilizziamo dunque $\underline{v} = (1, 0, 0, 0)$, dato che la matrice costituita dai 4 vettori in riga ha il determinante diverso da 0 (cioè ha rango 4). Con l'occasione abbiamo dimostrato che i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.

Passiamo ora alla prima parte. Adeguiamo ricorsivamente il secondo e il terzo vettore. Scegliamo quindi $\underline{u}_1 = (1, 0, 0, 1)$; poi, $\underline{u}_2 = (1, 1, 2, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2, -\frac{1}{2}\right)$, meglio: $(1, 2, 4, -1)$. Infine, $\underline{u}_3 = (0, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1) - \frac{1}{22}(1, 2, 4, -1) = \left(-\frac{6}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{6}{11}\right)$, meglio: $(3, -5, 1, -3)$.

Es. 124. Calcolare la proiezione ortogonale di $(-1, 1, 2)$ sul sottospazio $S = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 0), (3, 0, 2) \rangle$.

Sol. Una base di S è ad es. $\{(1, 0, 0), (2, 0, 1)\}$, ma deve essere ortogonalizzata. Adeguando il secondo vettore al primo otteniamo $(2, 0, 1) - \frac{2}{1}(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$. La proiezione è quindi: $-1(1, 0, 0) + 2(0, 0, 1) = (-1, 0, 2)$. In effetti si tratta della proiezione sul piano xz, perché i vettori iniziali hanno tutti la y nulla.

Es. 125. Dopo aver calcolato una base ortogonale del sottospazio S, in $\mathbf{R}^4$, di equazioni $x_1 - x_4 = x_2 - x_4 = 0$, decomporre il vettore $(2, 0, 1, 0)$ nella proiezione ortogonale e nella componente ortogonale rispetto a S. Successivamente calcolare quest'ultima componente anche come la proiezione ortogonale di $(2, 0, 1, 0)$ sul sottospazio ortogonale $S^\perp$.

Sol. Le equazioni parametriche di S sono ad esempio $\underline{x} = (a, a, b, a)$. Una base di S è quindi $\{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$; essa è oltretutto già ortogonale. La proiezione ortogonale richiesta è $\frac{2}{3}(1, 1, 0, 1) + 1(0, 0, 1, 0) = \frac{1}{3}(2, 2, 3, 2)$. Sottraendo tale proiezione a $(2, 0, 1, 0)$ otteniamo $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$, cioè la componente ortogonale cercata.

Due equazioni cartesiane di $S^\perp$ sono $x_1 + x_2 + x_4 = 0$, $x_3 = 0$, quindi $S^\perp$ ha forma parametrica uguale ad esempio ad $(a, b, 0, -a-b)$. Una base di $S^\perp$ è $\{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1)\}$ ma non è ortogonale. Adeguando il primo vettore al secondo otteniamo $(1,0,0,-1) - \frac{1}{2}(0,1,0,-1) = \left(1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Possiamo amplificarlo di 2, ottenendo $(2,-1,0,-1)$. Ora calcoliamo la componente ortogonale su S, appunto in modo alternativo, come

$$\frac{(2,0,1,0) \times (2,-1,0,-1)}{(2,-1,0,-1) \times (2,-1,0,-1)}(2,-1,0,-1) + \frac{(2,0,1,0) \times (0,1,0,-1)}{(0,1,0,-1) \times (0,1,0,-1)}(0,1,0,-1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right).$$

Osserviamo che esisterebbe un ulteriore metodo risolutivo, anche se qui non è richiesto. Il sottospazio ortogonale a S, in simboli $S^\perp$, è uguale a $\langle (1,0,0,-1), (0,1,0,-1) \rangle$. Ora, avendo a disposizione una base di S e una di $S^\perp$ (con questo metodo non importa che le basi siano ortogonali o meno!), essendo in presenza di una somma diretta $S \oplus S^\perp = \mathbf{R}^4$ è possibile decomporre $(2,0,1,0)$ *in modo unico* come $(a(1,1,0,1) + b(0,0,1,0)) + (c(1,0,0,-1) + d(0,1,0,-1))$, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a + d = 0 \\ b = 1 \\ a - c - d = 0 \end{cases}.$$

La soluzione è $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = \frac{4}{3}$, $d = -\frac{2}{3}$. Sostituendo i 4 numeri otteniamo simultaneamente la proiezione ortogonale e la componente ortogonale. Il punto di forza di questo metodo è il funzionamento senza ricorso all'ortogonalizzazione; notiamo, tuttavia, che è necessario risolvere sistemi lineari senza poter utilizzare i coefficienti di Fourier.

Es. 126. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio S di equazione $x - 2y + 4z = 0$. Calcolare la dimensione del sottospazio $S + \langle (4,0,-1) \rangle$.

Sol. Poiché una base ortogonale di S è $\{(0,2,1), (10,1,-2)\}$, si ha: $\underline{p} = \underline{0} + \frac{10}{105}(10,1,-2) = \left(\frac{20}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{4}{21}\right)$; *dim.* $= 2$ perché $(4,0,-1) \in S$, quindi il nuovo sottospazio è sempre S (oppure con la formula di Grassmann: *dim.* $= 2 + 1 - 1$).

In alternativa, utilizziamo il vettore normale (a,b,c) che consente di calcolare subito la *componente* ortogonale $\underline{c}$ (da sottrarre poi al vettore); essa è uguale a $\frac{(1,0,0) \times (1,-2,4)}{(1,-2,4) \times (1,-2,4)} = \frac{1}{21}(1,-2,4)$. Ritroviamo così $\underline{p} = (1,0,0) - \underline{c}$.

Es. 127. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,4)$ su $S = \langle (1,1,1), (2,2,2), (3,3,0) \rangle$. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche di S e anche di $S^\perp$.

Sol. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$. $S : x = y$ (parametriche: $(x,y,z) = (s,s,t)$); $S^\perp : x + y + z = x + y = 0$ (dunque due equazioni) oppure, meglio, $x + y = z = 0$ (parametriche: $(x,y,z) = (s,-s,0)$).

Es. 128. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,4,2)$ su $S = \langle (1,1,1,1), (2,2,2,2) \rangle$. Calcolare anche la componente ortogonale. Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di S.

Sol. $\frac{9}{4}(1,1,1,1)$; $\frac{1}{4}(-5,-1,7,-1)$. $S : x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ (dunque tre equazioni); eq. parametriche: $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (s,s,s,s)$.

Es. 129. Determinare una base, poi equazioni cartesiane e infine parametriche del sottospazio $T = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1), (0,0,3,3) \rangle$. Determinare inoltre equazioni cartesiane di $T^\perp$, la sua dimensione e una base.

Sol. Base di T: $\{(1,1,0,0), (1,1,1,1)\}$. $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Eq. param. : $(x_1,x_2,x_3,x_4) = s(1,1,0,0) + t(1,1,1,1)$, o meglio, $s'(1,1,0,0) + t'(0,0,1,1)$. $T^\perp : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$. $dim(T^\perp) = 2$. Una base di $T^\perp$: $\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\}$.

Es. 130. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4)$ su $S = \langle(4,1,0,0),(4,2,0,0),(1,1,0,0)\rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di S e di $S^\perp$.

Sol. $(1,2,0,0)$. $S : x_3 = x_4 = 0$ (dunque due equazioni). $S^\perp : 4x_1 + x_2 = 4x_1 + 2x_2 = 0$, oppure, meglio: $x_1 = x_2 = 0$.

Es. 131. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ rispetto al sottospazio $S : 2x-y+2w-z = x-z = 0$. Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle(1,3,1,2),(0,0,0,1)\rangle$ è una somma diretta.

Sol. Calcoliamo una base di S per poi ortogonalizzarla — difficilmente troveremo subito una base ortogonale! Abbiamo: $x = z$, $y = 2x+2w-z = 2w+z$ (infatti ci aspettavamo $4-2$ parametri). Dalla forma parametrica di S, $(z, 2w+z, w, z)$, otteniamo la base $\{(0,2,1,0),(1,1,0,1)\}$. Ora ortogonalizziamo ad es. il primo vettore rispetto al secondo, ottenendo $(0,2,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,0,1)$ o meglio un suo multiplo, $(2,-4,-3,2)$. Infine calcoliamo la proiezione ortogonale:

$$\underline{p} = \frac{(1,0,0,0)\times(1,1,0,1)}{(1,1,0,1)\times(1,1,0,1)}(1,1,0,1) + \frac{(1,0,0,0)\times(2,-4,-3,2)}{(2,-4,-3,2)\times(2,-4,-3,2)}(2,-4,-3,2) = \left(\frac{5}{11},\frac{1}{11},-\frac{2}{11},\frac{5}{11}\right).$$

Per conferma, notiamo che $\underline{p}-(1,0,0,0)$ è ortogonale ai due vettori della base di S, dunque (esercizio) è ortogonale a tutto il sottospazio S.

Poniamo in riga i 4 vettori delle basi di S e di T (non occorre utilizzare la base ortogonalizzata poco fa, complicheremmo soltanto i calcoli). Il rango della matrice ottenuta vale 3, quindi $S \cap T$ ha dimensione $2+2-3 = 1$ e la somma non è diretta (era sufficiente fermarsi al rango uguale a 3). Una strategia diversa è quella di risolvere il sistema

$$a(0,2,1,0) + b(1,1,0,1) = c(1,3,1,2) + d(0,0,0,1)\ .$$

Oltre alla soluzione nulla emerge tutta una soluzione parametrica $(a,a,a,-a)$ che conduce all'intersezione $\{(a,3a,a,a) : a \in \mathbf{R}\}$. Abbiamo così identificato esplicitamente un vettore che genera il sottospazio $S \cap T = \langle(1,3,1,1)\rangle$. Ricordiamo che nel caso di una somma diretta l'intersezione consiste del solo zero.

Es. 132. Determinare le coordinate del vettore $(1,0,0)$ rispetto alla base $(\sqrt{2},1,0),(-1,\sqrt{2},3)$, $(2\sqrt{2},-4,2\sqrt{2})$.

Sol. Non occorre risolvere un laborioso sistema di tre equazioni e tre incognite, perché la base data è ortogonale (i tre prodotti scalari sono nulli). Le coordinate α,β,γ saranno quindi i rispettivi coefficienti di Fourier. Otteniamo:

$$\alpha = \frac{(1,0,0)\times(\sqrt{2},1,0)}{(\sqrt{2},1,0)\times(\sqrt{2},1,0)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ ,\ \beta = -\frac{1}{12}\ ,\ \gamma = \frac{\sqrt{2}}{16}\ .$$

Es. 133. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(8,2,3)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(2,5,6),(1,1,0),(0,0,3)\rangle$.

Sol. Prima di avventurarci nell'inutile calcolo di una base ortogonale mediante il procedimento di Gram-Schmidt, notiamo che il sottospazio è... l'intero $\mathbf{R}^3$! Ora, la proiezione ortogonale su S di un vettore $\underline{v} \in S$ è proprio il vettore stesso; infatti, la proiezione deve appartenere al sottospazio e — come secondo requisito — se sottratta a $\underline{v}$ deve dare un vettore ortogonale a S. In effetti $\underline{v}-\underline{v}$ dà il vettore nullo, che è a tutti gli effetti un vettore ortogonale a S.

Attenzione: se dovessimo calcolare le coordinate di $(8,2,3)$ rispetto alla base data, non avremmo alternative: sarebbe necessario risolvere il sistema $(8,2,3) = \alpha(2,5,6)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,0,3)$. Infatti non avrebbe senso calcolare i coefficienti di Fourier, dato che la base non è ortogonale. D'altra parte, se la ortogonalizzassimo otterremmo una base diversa da quella del testo.

Es. 134. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S, in $\mathbf{R}^4$, definito dalla sola equazione $2x + y + 3w - z = 0$.

Sol. È conveniente trovare subito la componente ortogonale, cioè la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ sul sottospazio $S^\perp$ ortogonale a S. Otteniamo

$$\underline{c} = \frac{(1, 0, 3, 2) \times (2, 1, 3, -1)}{(2, 1, 3, -1) \times (2, 1, 3, -1)}(2, 1, 3, -1) = \frac{3}{5}(2, 1, 3, -1) \ .$$

Ora la proiezione richiesta è semplicemente

$$\underline{p} = \underline{v} - \underline{c} = (1, 0, 3, 2) - \frac{3}{5}(2, 1, 3, -1) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5} \right) \ .$$

In alternativa possiamo trovare una base ortogonale di S (lavoro non facile, visto che i vettori sono tre...) per poi proiettare direttamente $\underline{v}$, utilizzando tre coefficienti di Fourier.

Es. 135. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S definito dal sistema $2x + y + 3w - z = x - z = y + w + z = 0$.

Sol. La situazione è molto diversa rispetto all'Es. 134. È conveniente ora trovare una base di S, dunque un solo vettore, per poi proiettare direttamente $\underline{v}$ su tale vettore. Nel caso presente, infatti, S ha dimensione 1 mentre è $S^\perp$ ad avere dimensione 3; sarebbe inutile costruire una base ortogonale di $S^\perp$.

Una soluzione del sistema dato può essere calcolata a partire da $x = z$, dunque ponendo $x = z = 1$, ottenendo poi $y = -1 - w$ e infine $w = 0$, $y = -1$ (dunque la soluzione generale è $(t, -t, 0, t)$ ed è la forma parametrica di S). Ora abbiamo:

$$\underline{p} = \frac{(1, 0, 3, 2) \times (1, -1, 0, 1)}{(1, -1, 0, 1) \times (1, -1, 0, 1)}(1, -1, 0, 1) = \frac{3}{3}(1, -1, 0, 1) = (1, -1, 0, 1) \ .$$

Infine, la componente ortogonale è

$$\underline{c} = \underline{v} - \underline{p} = (1, 0, 3, 2) - (1, -1, 0, 1) = (0, 1, 3, 1) \ .$$

Anche se non è richiesto, verifichiamo che $\underline{c}$ è generato dalla base $\{(2, 1, 3, -1), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 1)\}$ di $S^\perp$ (non occorre ortogonalizzare tale base!). Effettivamente,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Es. 136. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi $S = \langle (1, 2, 3, 4), (1, 2, 0, 1) \rangle$ e $T = \langle (0, 1, 0, 1),\ (2, 3, 3, 4) \rangle$.

Sol. Risolviamo il sistema di 4 equazioni in 4 incognite: $a(1, 2, 3, 4) + b(1, 2, 0, 1) = c(0, 1, 0, 1) + d(2, 3, 3, 4)$, cioè $a + b - 2d = 0$, $2a + 2b - c - 3d = 0$, $3a - 3d = 0$, $4a + b - c - 4d = 0$. Si tratta di un sistema omogeneo di rango 3 la cui soluzione generale è (t, t, t, t). Dunque l'intersezione consiste dei vettori del tipo $t(1, 2, 3, 4) + t(1, 2, 0, 1) = (2t, 4t, 3t, 5t)$; in simboli, $S \cap T = \langle (2, 4, 3, 5) \rangle$. La dimensione dell'intersezione vale 1.

In alternativa possiamo scrivere due equazioni cartesiane per S, poi altre due per T (col metodo degli orlati), infine risolviamo il sistema totale, di 4 equazioni. In questo caso la soluzione (con un parametro) esprimerà direttamente il sottospazio $S \cap T$. Dalla forma parametrica è immediato ricavare la base, che consiste di un solo vettore. Il sistema è ad esempio

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + 2w - 2z = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 3x - 2w = 0 \\ 3y + w - 3z = 0 \end{cases} \end{cases} .$$

Es. 137. Uno spazio vettoriale V ha la proprietà di contenere due sottospazi di dimensione 5 la cui intersezione è il solo vettore nullo. Stabilire se $dim(V)$ può essere uguale a 10 e se essa può essere uguale a 11.

Sol. Le risposte sono entrambe affermative. Fissiamo infatti una base di V e selezioniamo due insiemi disgiunti, ciascuno contenente 5 vettori della base, generando poi i rispettivi sottospazi S e S'. Per la formula di Grassmann essi hanno soltanto lo zero in comune, dato che $dim(S \cap S') = 5 + 5 - 10$. Notiamo che lo stesso ragionamento non sarebbe possibile se la dimensione globale fosse uguale a 9 o a meno; infatti una base avrebbe al massimo 9 elementi, dunque non potremmo formare due gruppi disgiunti e di cardinalità 5.

Es. 138. Esibire una base del sottospazio $\langle(1, 2, 3, 1), (1, 2, 4, 1)\rangle + \langle(1, 2, 5, 1), (1, 0, 0, 1)\rangle$. Verificare la validità della formula di Grassmann in questo contesto, calcolando esplicitamente la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

Sol. È sufficiente estrapolare un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti, a partire dai 4 vettori dati. Il rango della matrice di ordine 4 che ha tali vettori come righe, vale 3 (due colonne sono uguali e d'altra parte esistono minori di ordine 3 non nulli; notiamo che è stato utile spostare l'attenzione sulle colonne). Il sottospazio-somma ha pertanto dimensione 3. Una sua base è data ad es. dagli ultimi tre vettori. Secondo la formula di Grassmann l'intersezione dovrebbe avere dimensione $2 + 2 - 3 = 1$. Per un controllo diretto, possiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} a + b - c - d = 0 \\ 2a + 2b - 2c = 0 \\ 3a + 4b - 5c = 0 \\ a + b - c - d = 0 \end{cases} .$$

Per quanto visto sopra, il rango dell'incompleta vale 3; il sistema ammette soluzione (è omogeneo) e occorrono $4 - 3$ parametri. La quarta equazione è superflua. La seconda meno il doppio della prima dà $d = 0$ e di conseguenza $c = a + b$. Ora la terza equazione dà $b = -2a$. In conclusione, la soluzione parametrica è $(a, b, c, d) = t(1, -2, -1, 0)$. In effetti, tornando ai due insiemi di generatori otteniamo

$$t(1, 2, 3, 1) - 2t(1, 2, 4, 1) = -t(1, 2, 5, 1) + 0 \cdot (1, 0, 0, 1) = (-t, -2t, -5t, -t) .$$

L'intersezione è quindi il sottospazio $\langle(1, 2, 5, 1)\rangle$; esso ha dimensione 1, a conferma della formula di Grassmann.

Es. 139. In $\mathbf{R}^5$ sono dati i due sottospazi $S : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ e $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Dimostrare che $S + T = \mathbf{R}^5$.

Sol. Tenendo presente la formula di Grassmann è sufficiente mostrare che $dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = 5$; poiché le dimensioni di S e T valgono rispettivamente $5 - 1$ e $5 - 2$, resta da dimostrare che $dim(S \cap T) = 2$. Accorpando i due sistemi otteniamo $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$ e $x_5 = 0$, quindi la soluzione parametrica è $(s, s, t, t, 0)$ e una base dell'intersezione è ad es. $\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\}$.

Un altro modo di risolvere l'esercizio è quello di unire due rispettive basi per poi controllare che il rango della matrice globale valga 5. Ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 5 (esistono minori non nulli di ordine 5 facilmente rintracciabili, come ad es. quello relativo alle righe 1, 2, 3, 4, 7).

Notiamo, come approfondimento, che l'intersezione di due sottospazi di dimensioni 4 e 3 in $\mathbf{R}^5$ non può avere dimensione δ minore di 2; infatti la dimensione della somma dei due sottospazi non può superare 5, quindi (Grassmann) $3 + 4 - \delta \leq 5$. Invece δ potrebbe valere 3, ma non di più (3 è infatti la minore delle dimensioni date).

8

Coniche e complementi

Es. 140. Determinare sia il vertice che un'equazione della direttrice, per la parabola di equazione $9x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{10}x = 0$.

<u>*Sol.*</u> Un idoneo cambiamento di coordinate è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Otteniamo l'equazione $Y = -5X^2 + 3X$. Applicando le note formule, abbiamo che $V^{X,Y} = \left(\frac{3}{10}, \frac{9}{20}\right)$, da cui segue che $V^{x,y} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{9}{20}, \frac{33}{20}\right)$; nel nuovo riferimento l'equazione della direttrice è $Y = \frac{1}{2}$; quindi nel riferimento iniziale abbiamo l'equazione $\frac{1}{\sqrt{10}}(-x + 3y) = \frac{1}{2}$ (utilizzando la legge inversa).

Es. 141. Stabilire se $A = (24, -143)$ è un punto allineato con $B = (1, 0)$ e col fuoco della parabola di equazione $y = 3x^2 - 12x$. Esibire la traslazione necessaria per portare il vertice di tale parabola nella nuova origine.

<u>*Sol.*</u> Il fuoco è $F = \left(2, -\frac{143}{12}\right)$, quindi NO ($A$ è allineato ad esempio con l'*origine* e col fuoco). Rigorosamente, dovremmo osservare che $\overrightarrow{AB}$ non è proporzionale a $\overrightarrow{BF}$.

La traslazione è data dalle formule $x = X + 2\,, y = Y - 12$.

Es. 142. Calcolare i versori degli assi (idonei autovettori normalizzati...) della conica di equazione $2x^2 + 4xy - y^2 - 12 = 0$. Calcolare le coordinate di uno dei suoi fuochi, a scelta, e scrivere l'equazione della relativa direttrice.

<u>*Sol.*</u> Ad esempio $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. I rispettivi autovalori sono -2 e 3. Dalla forma canonica, $\frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{6} = 1$ (forma che possiamo ottenere col metodo degli invarianti, utilizzando soltanto gli autovalori) si ottiene un fuoco $F = (0, \sqrt{10})$ e la relativa direttrice $Y = \frac{4}{\sqrt{10}}$, ecc. Nelle coordinate originali tale fuoco è $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ (utilizziamo le leggi del cambiamento di riferimento che possiamo scrivere in forma vettoriale come $(x, y) = X\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + Y\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, oppure in forma matriciale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$; queste leggi potevano essere utilizzate sin dall'inizio, in alternativa al metodo degli invarianti) . L'equazione della direttrice è $2x + y = 2\sqrt{2}$ (utilizziamo le formule inverse, $(X, Y) = x\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$).

Es. 143. Sia $P(x, y)$ un polinomio di grado 2 in 2 variabili, avente i monomi in x^2 e y^2 di segno opposto. Dimostrare che l'equazione relativa a P non rappresenta un'ellisse, né una parabola.

<u>*Sol.*</u> Il determinante della relativa matrice 2×2 è del tipo $rt - s^2$, con r e t discordi. Esso è quindi negativo in ogni caso.

Es. 144. Calcolare le coordinate di un fuoco e l'equazione di un asintoto (nel riferimento Oxy) relativamente alla conica di equazione $3x^2 + 4xy + 16 = 0$.

<u>*Sol.*</u> Un'equazione canonica: $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{4} = 1$. Un fuoco, in coordinate originali (x, y): $(-2, 4)$; asintoti: $x = 0$, $3x + 4y = 0$ (le formule per il cambiamento di coordinate sono: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y)$ e le inverse, utilizzando la matrice trasposta).

Es. 145. Esibire una formula per calcolare l'eccentricità di un'ellisse come funzione dei due autovalori.

<u>*Sol.*</u> Partendo dall'equazione $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = H$ possiamo supporre, restando nella generalità, che $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Infatti i due autovalori sono, per ipotesi, positivi e possiamo eventualmente scambiare gli assi per ordinarli nel modo voluto. La forma canonica è pertanto

$$\frac{x^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{H}{\lambda_2}} = 1 \ .$$

Poiché $a \geq b$, l'eccentricità vale

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{H}{\lambda_1} - \frac{H}{\lambda_2}}}{\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}} \ .$$

Per enfatizzare il ruolo degli autovalori possiamo riscrivere la formula come

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \ .$$

In particolare notiamo che l'informazione essenziale è il rapporto tra gli autovalori, a prescindere da H che è soltanto un fattore di scala.

Es. 146. Determinare i valori di p tali che la curva di equazione $x^2 + pxy + 4y^2 + (p - 2\sqrt{10})x - 6 = 0$ sia una parabola. Successivamente, porre $p = 2\sqrt{10}$; sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta. Esibire un cambiamento di coordinate che dia a $\mathcal{C}$ una forma canonica, e scrivere tale forma. Determinare i fuochi di $\mathcal{C}$, sia nel nuovo riferimento che in quello originale. Calcolare l'eccentricità di $\mathcal{C}$.

<u>*Sol.*</u> $p = \pm 4$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 - \frac{Y^2}{6} = 1$; $F^{X,Y} = (\pm\sqrt{7}, 0)$; $F^{x,y} = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{5})$; $e = \sqrt{7}$.

Es. 147. Sia data l'iperbole di equazione $3x^2 - 26\sqrt{3}xy - 23y^2 + 144 = 0$. Calcolarne: le direzioni (versori) degli assi, una forma canonica, le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti sia nella forma canonica che in quella iniziale, infine l'eccentricità.

<u>*Sol.*</u> $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Forma canonica: $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$. $F_1^{(XY)} = (\sqrt{13}, 0)$, $F_1^{(xy)} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{39}}{2}\right)$ ecc. Asintoti: $Y = \pm\frac{3}{2}X$; nelle coordinate iniziali: $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \pm\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\dots$. $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Es. 148. Determinare le direzioni degli assi (autovettori normalizzati) e l'eccentricità della curva di equazione $19x^2 + 24xy + 26y^2 - 140 = 0$.

<u>*Sol.*</u> $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$; $e = \sqrt{\frac{5}{7}}$ (equazione canonica: $\frac{X^2}{14} + \frac{Y^2}{4} = 1$).

Es. 149. Scrivere una forma canonica della curva di equazione $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 8y - 2 = 0$. Calcolarne il centro e l'eccentricità.

<u>*Sol.*</u> Si tratta di un'ellisse. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$; le soluzioni sono $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Il determinante della matrice di ordine 3 è uguale a -53. Per calcolare H in relazione alla forma canonica $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = H$, risolviamo l'equazione $-\lambda_1\lambda_2 H = -53$, trovando $H = \frac{53}{5}$. Otteniamo quindi

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{106} X^2 + \frac{5 - \sqrt{5}}{106} Y^2 = 1 \ .$$

Il sistema relativo al centro è $2\alpha+\beta-1=\alpha+3\beta+4=0$, la cui soluzione è $\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{5}\right)$. L'eccentricità non dipende dal fattore di scala, dunque possiamo trascurare i denominatori (106) e, per ulteriore comodità, possiamo dividere l'equazione per $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$ — altrimenti dovremmo lavorare con $a^2=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$ ecc.). Ora, poiché $a^2=5-\sqrt{5}$ e $b^2=5+\sqrt{5}$, calcoliamo c come $\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2\sqrt{5}}$. Infine,

$$e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}\ .$$

Es. 150. Scrivere le coordinate di un fuoco e un'equazione della relativa direttrice della curva di equazione $xy-10=0$.

Sol. $(\sqrt{20},\sqrt{20})$; $y=-x+\sqrt{20}$ (equazione canonica: $\frac{X^2}{20}-\frac{Y^2}{20}=1$).

Es. 151. Di una parabola è noto che la direttrice ha equazione $y=3x+5$ e il fuoco ha coordinate $(8,2)$. Stabilire se $(4,4)$ è un punto della parabola.

Sol. La distanza del punto $(4,4)$ dalla direttrice deve essere uguale alla distanza dal fuoco, ma ciò non accade perché

$$\frac{|3\cdot 4-4+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}\neq\sqrt{(4-8)^2+(4-2)^2}\ .$$

Nota: per dimostrare che $\frac{13}{\sqrt{10}}\neq\sqrt{20}$ possiamo elevare al quadrato i due termini.

Es. 152. Con riferimento all'Es. 151, determinare i punti che appartengono alla parabola ed hanno ordinata nulla.

Sol. Consideriamo il punto candidato, $(t,0)$. Abbiamo l'equazione

$$\frac{|3\cdot t-0+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{(t-8)^2+(0-2)^2}\ ,$$

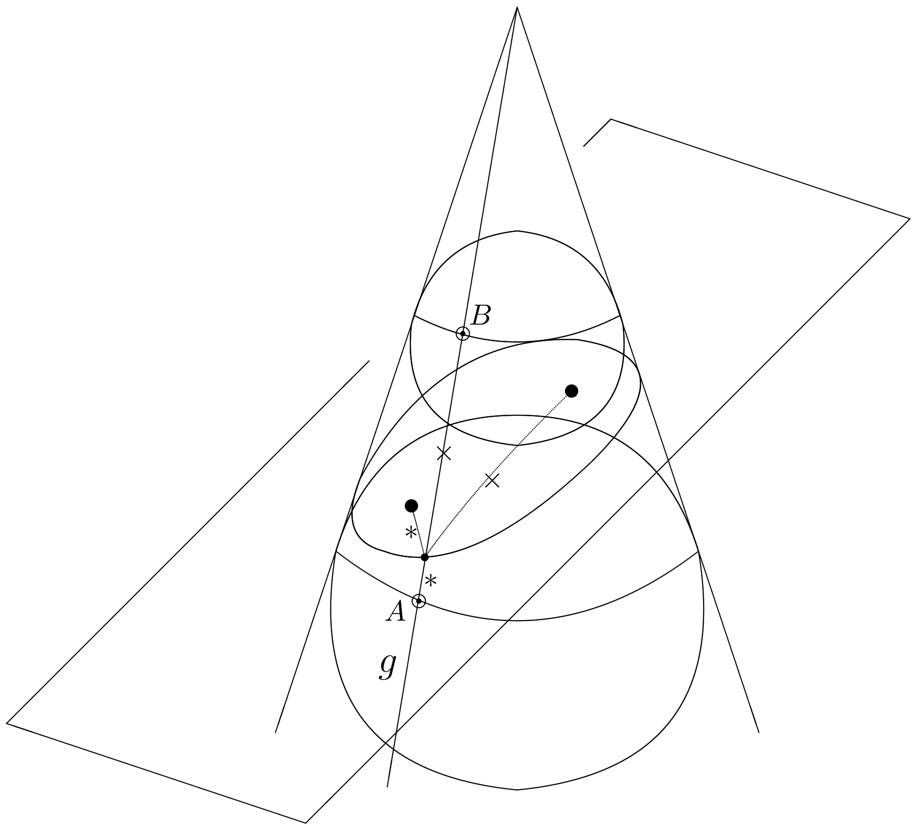
da cui otteniamo $t=95\pm\sqrt{8370}$.

Es. 153. Sia $\mathcal{C}$ la conica che ha il fuoco e la direttrice come nell'Es. 151 e che inoltre passa per $(4,4)$. Stabilire se $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

Sol. L'eccentricità vale $\sqrt{20}/(13/\sqrt{10})=\frac{\sqrt{200}}{13}$. Il risultato è maggiore di 1 perché $13^2=169$, dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

Es. 154. Dato un cono e un piano che lo interseca formando un'ellisse, i *fuochi* di questa ellisse possono essere definiti come i punti di tangenza, su tale piano, delle due sfere inscritte nel cono e appunto tangenti al piano (vedere la figura). Partendo dunque dalla definizione di ellisse come intersezione opportuna di un cono e di un piano, dimostrare che la somma delle distanze dai due fuochi di un punto qualunque dell'ellisse è costante.

Sol. Il piano dell'ellisse contiene i due segmenti che collegano ai fuochi un punto scelto arbitrariamente sull'ellisse. Nella figura, le due distanze dai fuochi sono rappresentate dai simboli $\times$ e $*$ all'interno dell'ellisse. Consideriamo ora la generatrice g passante per il punto scelto sull'ellisse. Essa è tangente alle sfere in due punti che appartengono ai rispettivi cerchi di tangenza delle sfere rispetto al cono. Poiché anche il piano ha la proprietà di essere tangente alle due sfere, ciascuno dei due segmenti interni all'ellisse può essere riportato sulla retta g (le tangenti condotte da un punto esterno a una sfera staccano segmenti di lunghezza invariante). I nuovi segmenti sono allineati ed hanno per estremi A e B. È chiaro che il segmento AB ruota lungo le due circonferenze tangenti, rimanendo ovviamente con la stessa lunghezza, al variare del punto scelto sull'ellisse. Abbiamo

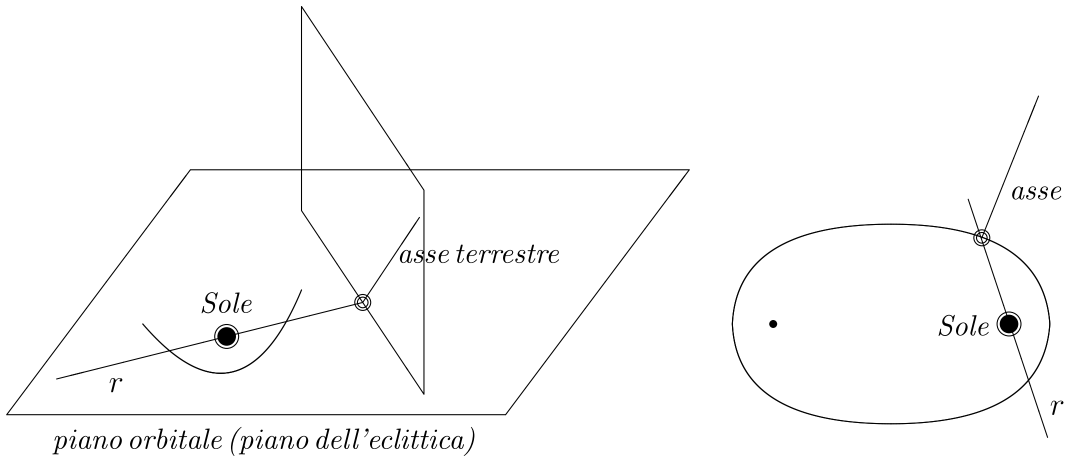


quindi dimostrato che la somma delle distanze dai due fuochi è costante e la figura ha concluso la sua funzione. Tornando poi alla rappresentazione di un'ellisse in un piano, si può osservare che per questioni di simmetria tale costante è proprio la distanza dei due vertici situati sull'asse maggiore.

Es. 155. Nell'emisfero boreale il periodo primavera-estate dura qualche giorno in più rispetto all'autunno-inverno. Dimostrare che tale discrepanza è legata alla forma ellittica dell'orbita terrestre.

Sol. Intanto notiamo che qualunque retta r passante per un fuoco di un'ellisse taglia la curva in due archi di lunghezza diversa, a meno che tale retta non passi per il centro (esercizio: traslare r sul centro e osservare il cambiamento delle lunghezze dei due archi). Nel caso in esame, il momento dell'equinozio viene raggiunto quando l'asse di rotazione terrestre è contenuto nel piano passante per la Terra e perpendicolare al segmento congiungente la Terra e il Sole (vedere la retta r nella figura). Queste condizioni geometriche garantiscono, infatti, l'irraggiamento di qualunque punto della Terra per circa 12 ore (la metà di un giorno terrestre) a prescindere dalla latitudine. Nella figura è rappresentato l'equinozio di primavera, mentre l'altra intersezione con r corrisponde all'equinozio d'autunno. Ricordiamo che il Sole occupa uno dei due fuochi dell'orbita terrestre e che dopo l'equinozio d'autunno l'angolo tra r e l'asse terrestre aumenta, indebolendo la potenza del Sole, fino a raggiungere il massimo valore ($90° + 23° \, 27'$ circa) nel solstizio d'inverno (un punto all'interno dell'arco minore, vicino ma non uguale al vertice). Superato invece l'equinozio di primavera, l'angolo comincia ad assumere valori minori di $90°$ fino a scendere a circa $66° \, 33'$ nel solstizio d'estate. Nell'emisfero australe il ruolo dei due equinozi è ovviamente scambiato. In particolare, quindi, l'estate a Wellington in Nuova Zelanda dura qualche giorno di meno rispetto alla simmetrica Roma in Italia...

Attenzione: una conseguenza delle *leggi di Keplero* è la maggiore velocità di rivoluzione della Terra nei punti più vicini al fuoco occupato dal Sole. Questo fenomeno aumenta ulteriormente la differenza di durata dei due periodi.



Es. 156. Scrivere un'equazione cartesiana del piano osculatore relativo alla curva γ parametrizzata da $P(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nel punto $P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Sol. Abbiamo: $P'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1)$, $P''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 0)$. Dunque otteniamo

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-\frac{\pi}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2z - \pi = 0 \ .$$

Es. 157. Calcolare il vettore binormale relativo alla curva γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nel punto $H = (1, 1, 1)$.

Sol. Abbiamo: $P' = (1, 2t, 3t^2)$, $P'' = (0, 2, 6t)$. Dunque in H troviamo i rispettivi vettori $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 6)$, il cui prodotto vettoriale è uguale a $(6, -6, 2)$. Infine, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3, -3, 1)$.

Es. 158. Calcolare il raggio di curvatura di γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nell'origine. Calcolare il relativo centro di curvatura.

Sol. Applicando la nota formula, abbiamo:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{||P'(0)||^3}{||P'(0) \wedge P''(0)||} = \frac{||(1,0,0)||^3}{||(1,0,0) \wedge (0,2,0)||} = \frac{1}{2} \ .$$

Notiamo che il vettore normale $\mathbf{N}$ è, nel punto dato, proprio uguale a $\frac{P''}{||P''||} = (0, 1, 0)$ — sappiamo che in generale ciò non accade. Il centro di curvatura è uguale a $(0, 0, 0) + r\mathbf{N} = \big(0, \frac{1}{2}, 0\big)$.

Es. 159. Sia γ una curva la cui parametrizzazione $P(z)$ genera vettori tangenti di lunghezza costante, uguale a 5. Dimostrare che P'' è ortogonale a P' in ogni punto.

Sol. Per ipotesi abbiamo che $P' \times P' = 25$. D'altra parte, un semplice calcolo di analisi vettoriale mostrerebbe che $\frac{d}{dz}(A \times B) = \frac{d}{dz}A \times B + A \times \frac{d}{dz}B$ (dove i vettori A e B sono dati in funzione di z). Nel nostro caso, abbiamo:

$$0 = \frac{d}{dz}(25) = \frac{d}{dz}(P' \times P') = \frac{d}{dz}(P') \times P' + P' \times \frac{d}{dz}(P') = 2(P' \times P'') \ ,$$

da cui segue l'ortogonalità dei vettori in esame. In particolare, notiamo che in questa situazione P'' è diretto come il vettore normale $\mathbf{N}$, lungo tutta la curva.

Es. 160. Un *gruppo* è un insieme G munito di un'operazione binaria "$\cdot$" che sia associativa e inoltre preveda l'esistenza di un elemento neutro e tale che $e \cdot g = g \cdot e = g \, \forall g \in G$ e anche l'esistenza di un elemento *inverso* g^{-1}, per ogni $g \in G$, tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. Ad es. l'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ è un gruppo rispetto all'operazione di somma; in questo caso il simbolo $\cdot$ diviene $+$ per dare risalto alla *commutatività* che invece in generale non vale (infatti essa non è prevista negli assiomi di gruppo, insomma non è "di serie"). Oltretutto, il prodotto in $\mathbf{Z}$ ha un significato diverso e non dà luogo a un gruppo (perché?).

Un altro importante esempio di gruppo è quello delle matrici invertibili di ordine fissato, con l'operazione di moltiplicazione; si tratta di un gruppo non commutativo.

Con queste premesse, dimostrare che l'insieme delle matrici cosiddette *ortogonali* di ordine fissato n (le matrici invertibili M di ordine n tali che $M^{-1} = M^t$) formano un gruppo $\mathcal{O}_n$ non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto tra matrici (dunque formano un cosiddetto *sottogruppo* del gruppo delle matrici invertibili di ordine n).

Sol. Il primo problema da affrontare è la chiusura rispetto all'operazione data (è un problema che ricorda quello della chiusura in un sottospazio, ma il contesto è diverso; qui siamo in presenza di un'unica operazione, senza l'intervento di scalari esterni). Date dunque A e B in $\mathcal{O}_n$, abbiamo che $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$ (soltanto il secondo $=$ utilizza la definizione di matrice ortogonale; il resto segue da proprietà generali delle matrici non necessariamente ortogonali); abbiamo quindi accertato la chiusura. Ora, l'associatività in $\mathcal{O}_n$ viene ereditata dall'associatività in vigore nell'insieme $\mathcal{M}_{n,n}$ di tutte le matrici di ordine n. L'elemento neutro, poi, è proprio I_n; questa matrice infatti svolge bene il suo lavoro in $\mathcal{M}_{n,n}$ ed è in effetti ortogonale. Infine, l'inversa di una matrice ortogonale A soddisfa $(A^{-1})^{-1} = A = (A^t)^t = (A^{-1})^t$, dunque A^{-1} è anch'essa una matrice ortogonale.

Il prodotto in $\mathcal{O}_n$ non è commutativo. Attenzione: ciò non segue automaticamente dalla mancanza di commutatività in $\mathcal{M}_{n,n}$: ad esempio nel sottoinsieme delle matrici diagonali, il prodotto diventa commutativo! Occorre invece esibire controesempi come

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

La creazione di questo controesempio può apparire inizialmente artefatta, ma dal punto di vista geometrico la lettura è semplice: stiamo componendo una rotazione di $60°$ con una riflessione (scambio degli assi cartesiani) e la sequenza di esecuzione dei due passaggi è cruciale. Osserviamo che le matrici ortogonali di ordine 2 rappresentano precisamente le rotazioni e le riflessioni eventualmente combinate tra loro.

Es. 161. Dimostrare che il seguente insieme, $\mathbf{Z}_n$, per un fissato intero $n \geq 2$, è un gruppo. Definiamo $\mathbf{Z}_n$ come l'insieme dei *resti* della divisione di un numero intero per n, dunque $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], [2], ..., [n-1]\}$; si tratta dell'*insieme quoziente*, in $\mathbf{Z}$, rispetto alla relazione di "avere lo stesso resto modulo n", che equivale (esercizio) alla relazione "n divide la differenza tra i due numeri". Nota: un altro notevole insieme quoziente è quello dei vettori liberi rispetto alla relazione di sovrapponibilità (avere lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso).

Torniamo al caso presente. Dati due resti $[r]$ e $[r']$, definiamo la loro somma come il resto di $a + a'$, dove a ha resto r e a' ha resto r' (in particolare occorrerà dimostrare che la definizione è *ben posta*, cioè essa non dipende dalla scelta di a e a' in $\mathbf{Z}$). Dimostrare dunque che gli interi modulo n formano un gruppo (commutativo).

Sol. Per vedere che la somma è ben posta, consideriamo a e un altro rappresentante $a + cn$, insieme ad a' con un altro rappresentante $a' + c'n$. Vedremo che non ha importanza la scelta dei rappresentanti, al fine di calcolare la somma dei resti. Infatti se $a = qn + r$ e $a' = q'n + r'$, allora

$(a+cn)+(a'+c'n) = (q+q'+c+c')n+r+r'$, quindi in entrambi i casi otteniamo $r+r'$ (se $r+r'$ è maggiore o uguale a n dobbiamo sottrarre un ulteriore n, in entrambi i casi).

L'associatività di questa somma segue facilmente dall'associatività in $\mathbf{Z}$. L'elemento neutro è il resto dell'intero 0 (o di un qualunque multiplo di n). L'opposto di $[p]$ è $[n-p]$ perché $[p]+[n-p] = [n] = [0]$.