Esercizi

di algebra lineare e geometria

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

Anno Accademico 2023 - 2024

Argomenti

1

Matrici

Es. 1. Calcolare le inverse delle matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi & 0 \\ 0 & 0 & 123 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es. 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare $CA + B^{-1}$. Verificare poi il teorema di Binet nel caso del prodotto $B \cdot B$.

Es. 3. Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcolare i 5 rispettivi ranghi. Calcolare A^{-1} e B^{-1} purché ciò sia possibile. Dei prodotti AC, AD, CA, DA calcolare solo quelli leciti.

Es. 4. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 5. Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 6. Calcolare

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

utilizzando la definizione originale di determinante.

Es. 7. Dimostrare che l'inversa di una matrice — se esiste — è unica.

Es. 8. Dimostrare che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (invertibile) è triangolare inferiore.

Es. 9. Esibire, mediante opportuni parametri, tutte le matrici $M \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che $M^2 = I_2$ e tutte le matrici $N \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che N^2 sia la matrice nulla.

2

Spazi vettoriali, rango, sottospazi

Es. 10. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 11. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T \\ T & 0 & T & T \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 12. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 8 & T \\ T & 1 & 8 & 1 \\ 2T & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 13. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 0 & 2 \\ 1 & T & 0 & 2 \\ 0 & 1 & T & 3 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 14. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 0 \\ 8 & 1 & 17 & 7 \end{pmatrix}$.

Es. 15. Determinare gli eventuali valori reali di k tali che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & k+1 & 7 \\ k & 10 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Es. 16. Determinare i valori di k tali che il sottospazio $\langle (1,1,0,k), (1,k,0,1), (k,-1,3,0) \rangle$ abbia dimensione 2.

Es. 17. Determinare i valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(1,1,1,2,k)$, $(k,1,3,3,-2)$, $(7,3,k,7,8)$.

Es. 18. Dimostrare che

$$S = \{(a+3b-c, 2a+c, 3a+b+c) \colon a,b,c \in \mathbf{R}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base.

Es. 19. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{S} = \{(a+b+c+d, a, a, b-d) \colon a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e determinarne una base.

Es. 20. Dati tre vettori linearmente indipendenti $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ di uno spazio vettoriale, dimostrare che $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}$, $2\underline{v}+3\underline{w}$ sono linearmente indipendenti e che invece $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$, $\underline{u}-3\underline{v}-\underline{w}$ non lo sono.

Es. 21. Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 3×3.

Es. 22. Determinare una base dello spazio vettoriale dei polinomi $p(t)$ a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 4.

Es. 23. Dimostrare che l'insieme delle funzioni — sia esso $\mathcal{M}$ — da un insieme generico T a uno spazio vettoriale V (sul campo reale), una volta munito delle operazioni di *somma di due funzioni* e di *prodotto di una funzione per uno scalare* diventa uno spazio vettoriale. Nota: la *somma* delle funzioni f e g è la funzione $f +_{\mathcal{M}} g$ che associa a un elemento $t \in T$ l'immagine $f(t) + g(t)$; per brevità possiamo utilizzare lo stesso simbolo $+$, ma ricordiamo che le due somme sono definite su insiemi diversi. Il *prodotto con uno scalare* $\alpha \cdot f$ associa a un elemento t l'immagine $\alpha \cdot f(t)$ (anche in questo caso dovremmo scrivere per esteso $\alpha \cdot_{\mathcal{M}} f$, per il primo prodotto).

Es. 24. Dimostrare che l'insieme delle funzioni derivabili, da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, è uno spazio vettoriale. I polinomi di grado minore o uguale a 4 formano un sottospazio di tale spazio vettoriale? E i polinomi di grado pari?

Es. 25. Dimostrare che l'insieme W ottenuto privando $\mathbf{R}^2$ del vettore $(2, 3)$, non è più uno spazio vettoriale (rispetto alle consuete operazioni). Fornire un esempio di sottospazio di $\mathbf{R}^2$ che sia contenuto in W e sia *massimale* — dunque non deve essere contenuto in altri sottospazi che siano contenuti in W.

Es. 26. Sia $\mathbf{Q}^2$ l'insieme dei vettori $(p, q) \in \mathbf{R}^2$ le cui componenti sono numeri razionali. Dimostrare che tale insieme non è uno spazio vettoriale "sui numeri reali" (dunque rispetto al prodotto con scalari reali).

Es. 27. Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi, $\mathbf{C}$, munito dell'usuale operazione di somma e dell'operazione di prodotto con scalari reali, è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali. Determinarne poi una base.

Es. 28. Consideriamo i seguenti tre insiemi che denotiamo con U, V, W rispettivamente: le matrici simmetriche 2×2; i polinomi in una variabile, di grado al più 2. I vettori geometrici dello spazio, applicati in un punto comune (ad esempio l'origine), pensati come forze fisiche. Dimostrare che i tre insiemi sono in effetti spazi vettoriali e dimostrare che hanno tutti la stessa dimensione. Concludere mostrando un isomorfismo mediante tre rispettive basi scelte a piacere.

3

Geometria del piano

Es. 29. Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per $(8,0)$ e $(8,3)$, poi un'equazione della retta passante per $(3,3)$ e $(-30,-30)$.

Es. 30. Data la retta r di equazione $3x+4y+7=0$, determinare un'equazione cartesiana della retta parallela a r e passante per $(8,-2)$. Determinare poi un'equazione cartesiana della retta perpendicolare a r e passante per $(0,2)$.

Es. 31. Che differenza c'è tra il *punto* $(7,9)$ e il *vettore* $(7,9)$?

Es. 32. Rappresentare graficamente la retta r descritta in forma parametrica come $x=6t+2$, $y=7t-4$. Stabilire se i punti $(20,17)$ e $(20,18)$ appartengono a r. Scrivere poi una forma cartesiana di r.

Es. 33. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche della retta r passante per $(4,1)$ e parallela all'asse x. Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{1300}$ dalla retta di equazione $2x+3y+5=0$.

Es. 34. Calcolare la proiezione ortogonale (scalare non negativo) del vettore $(8,9)$ sulla retta $r: x-3y+102=0$.

Es. 35. Calcolare la distanza tra il punto $(8,9)$ e la retta di equazione $y=2x-1$. Inoltre, su tale retta determinare i punti aventi distanza 10 da $(4,3)$.

Es. 36. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $y=3x-1$ e $x=3y-3$.

4

Geometria dello spazio

Es. 37. Stabilire se i punti $A:(-3\pi,1,5)$, $B:(0,3,5)$ e $C:(9\pi,9,6)$ sono allineati. Stabilire se essi sono complanari.

Es. 38. Stabilire se i punti $(\sqrt{2},2,3)$, $(1,-1,1)$, $(\sqrt{2},1,0)$ sono allineati. Stabilire se tali punti, insieme a $(0,0,1)$, sono complanari.

Es. 39. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0,1,0)$, $(-1,-2,-3)$ e parallelo al vettore $(0,2,1)$.

Es. 40. Determinare un'equazione del piano contenente l'asse x e passante per $(4,4,7)$.

Es. 41. Determinare e in modo che il punto $A=(1,2,e)$ giaccia nel piano contenente l'origine e i punti $B=(1,1,1)$, $C=(3,2,1)$. Successivamente scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse y e contenente i punti B, C.

Es. 42. Descrivere con un'unica equazione cartesiana (dipendente da parametri) la totalità dei piani passanti per il punto $P=(9,8,7)$.

Es. 43. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente equazioni parametriche: $x=3t-1$, $y=3t+1$, $z=8$. Stabilire se essa è contenuta nel piano $\pi: x+1=0$.

Es. 44. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(8,2,3)$ e parallela al vettore $(0,3,1)$.

Es. 45. Tra i piani passanti per $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$ determinare quello parallelo alla retta $r: x-y-5=y+z+4=0$.

Es. 46. Stabilire se esistono valori di k tali che il piano $\pi: x+2y+kz=4$ sia parallelo alla retta $\rho: x+y-3=y+z-1=0$ (e non la contenga).

Es. 47. Determinare equazioni cartesiane, e anche parametriche, della retta passante per $(8,0,1)$ e parallela al vettore $(0,10,0)$.

Es. 48. Scrivere equazioni parametriche della retta r passante per $A=(1,2,3)$ e $B=(3,4,-5)$. Utilizzando tali equazioni, aggiungere una condizione per descrivere parametricamente il *segmento* AB.

Es. 49. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P:(1,2,0)$, incidente la retta $s: x-y=y-z-1=0$ e parallela al piano $\pi: 3x-z=4$.

Es. 50. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P(1,1,1)$, incidente l'asse z e parallela al piano di equazione $x-2y+3z-4=0$.

Es. 51. Determinare equazioni cartesiane della retta incidente le rette $r: x-1=y-1=0$, $s: x+2z=y+z+1=0$ e passante per l'origine.

Es. 52. Stabilire se il piano di equazione $x - y = 1$ è parallelo alla retta passante per l'origine e per $(1, 2, 3)$.

Es. 53. Stabilire se le rette $\rho : x+y = x+z-1 = 0$, $\sigma : x+y = x-z = 0$, $\tau : 2x+y-z = y+z = 0$ giacciono in un piano comune.

Es. 54. Determinare equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta $r : x = y - z = 0$ e distanti 1 dal punto $(0, 0, 3)$.

Es. 55. Dopo aver verificato che le rette $r : x = z - 2 = 0$ e $s : x + y = y - 4 = 0$ sono sghembe, scrivere equazioni cartesiane della retta che le interseca perpendicolarmente.

Es. 56. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 4y = 9$ e il punto d'intersezione tra l'asse y e la retta di equazioni parametriche: $x = t, y = t + 1, z = t$.

Es. 57. Stabilire se il vettore $(4, 5, 1)$ e la retta $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$ formano un angolo di 60 gradi.

Es. 58. Dopo aver verificato che le rette $r : x+y = y+z+1 = 0$, $s : x+2y+z-8 = x-z-9 = 0$ sono parallele, calcolare la loro distanza.

Es. 59. Tra i piani perpendicolari alla retta $r : x - y - z = x + y + z - 5 = 0$, determinare quello passante per il punto $(8, 8, 9)$.

Es. 60. Tra i piani contenenti l'asse x, determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di $45°$ col piano $\pi : 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

Es. 61. Stabilire se le rette r e s, espresse in forma parametrica come $r : (2 + t, -t, 3)$ e $s : (t + 1, t - 1, 2t + 1)$ sono sghembe. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente la direzione perpendicolare a entrambe le rette date, e passante per $(1, 2, 3)$.

Es. 62. In un riferimento $Oxyz$ è data la retta $r : x - y + 2 = 2x + y + z - 4 = 0$. Descrivere mediante un sistema di equazioni cartesiane la totalità delle rette perpendicolari a r e passanti per $P = (1, 3, -1)$. Successivamente risolvere lo stesso problema con la condizione che le rette formino un angolo di $60°$ con r.

Es. 63. Scrivere equazioni cartesiane della retta che interseca le rette $r : x = y = 0$ e $r' : x - 3 = z = 0$ formando angoli di $60°$ con ciascuna retta.

Es. 64. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'intersezione dei tre piani $\pi_1 : x-1 = 0$, $\pi_2 : x + y = 2$, $\pi_3 : y - z = 8$ e perpendicolare a π_3.

Es. 65. Tra i punti della retta $r : x + z + 4 = x + y + z - 1 = 0$, determinare quelli distanti 5 dal piano $\alpha : x - z = 10$, poi quelli distanti 5 dal punto $(-2, 1, 1)$.

Es. 66. Calcolare il coseno positivo dell'angolo θ formato dall'asse x con la retta di equazione $x - 3y = y - z + 3 = 0$. Stabilire se θ è minore di 60 gradi.

Es. 67. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x + y = 8$ e $\pi' : x + 2y - 4z = 9$.

Es. 68. Determinare la distanza tra le rette (parallele) $s: x+y+2z = x-3 = 0$ e $s': y+2z+8 = x-4 = 0$.

Es. 69. Verificare che le seguenti rette, r e s, sono parallele:

$$r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=2 \end{cases} \quad , \ s : \begin{cases} x+2y+z=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Calcolare poi il coseno (≥ 0) dell'angolo formato da r col vettore $\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$.

Es. 70. Scrivere un'equazione del piano passante per $(8,4,2)$ e perpendicolare sia al piano $\alpha : x = 2$ che al piano $\beta : x+y+z = 5$. Stabilire se la retta $r : x-z = y+2z+9 = 0$ è parallela a β.

Es. 71. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0,1,0)$ e perpendicolare al vettore $(2,4,5)$. Determinare il coseno dell'angolo formato da tale piano col piano di equazione $z = 56$, e il coseno dell'angolo formato con l'asse y.

Es. 72. Scrivere equazioni cartesiane della retta che taglia perpendicolarmente l'asse y e la retta $r : x-y = x+y+2z+1 = 0$. Calcolare la minima distanza tra queste ultime due rette.

Es. 73. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(1,2,4)$ e perpendicolare al piano di equazione $x+2y-3z-1 = 0$.

Es. 74. Scrivere equazioni cartesiane delle due rette passanti per $Q = (3,5,4)$, tangenti alla sfera $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2y-4z-20 = 0$ e parallele al piano $\pi : x-1 = 0$.

Es. 75. Verificare che l'insieme $\{\underline{v} \in \mathbf{R}^3 \colon \underline{v} \times (7,8,9) = 0\}$ è un sottospazio. Determinarne la dimensione e una base.

5 Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica

Es. 76. Risolvere i due seguenti sistemi, col metodo di Cramer.

$$1:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-4y=5 \end{cases}, \quad 2:\begin{cases} 7x=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}.$$

Es. 77. Trovare tutte le eventuali soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1:\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-41y=0 \end{cases}, \quad 2:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x+4y=5 \\ 6x+9y=7 \end{cases}, \quad 3:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x+4y=5 \\ y=0 \end{cases},$$

$$4:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x+4y=5 \\ 2x+5y=6 \end{cases}, \quad 5:\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2y-6x=0 \end{cases}.$$

Disegnare le corrispondenti rette, sia mediante tabelle che con lo studio del coefficiente angolare e della quota. Giustificare geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate.

Es. 78. Solo nel secondo dei due seguenti sistemi la terza equazione si può ottenere "sommando" le due equazioni superiori, preventivamente moltiplicate per certi numeri (verificarlo). Dedurne che il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ammette un'unica soluzione — è cioè "compatibile" poiché conduce all'identità $0=0$.

$$1:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-4y=5 \\ 8x-9y=21 \end{cases} \qquad 2:\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-4y=5 \\ 8x-9y=20 \end{cases}.$$

Es. 79. Calcolare (se esistono) tutte le soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$a:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y-2z-2=0 \end{cases}, \quad b:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y-2z-2=0 \\ z=1 \end{cases}, \quad c:\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+y=0 \\ 5x+3y=0 \end{cases}, \quad d:\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+y=0 \\ 5x+3y=2 \end{cases}.$$

Interpretare tali sistemi come intersezioni di opportuni enti geometrici.

Es. 80. Trovare tutte le soluzioni (purché ve ne siano) per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1:\begin{cases} 2x+3y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad 2:\begin{cases} 2x+3y+3z=5 \\ 4x+6y+6z=9 \end{cases} \qquad 3:\begin{cases} 3x-6y+w+z=0 \\ 3y+w-2z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$$

Descrivere geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate, per ciascun sistema.

Es. 81. Dimostrare che un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango per colonne della matrice incompleta coincide col rango per colonne della completa.

Es. 82. Discutere i seguenti sistemi parametrici, al variare di $k \in \mathbf{R}$:

$$a : \begin{cases} kx + 3y = k \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad , \quad b : \begin{cases} kx + 3y + 5z = 0 \\ x + 6y + 10z = 0 \end{cases} \quad .$$

Interpretare tali sistemi come intersezione di opportuni enti geometrici, al variare di k.

Es. 83. Al variare di $k \in \mathbf{R}$, studiare la risolubilità del seguente sistema, in particolare specificando il numero di parametri nei casi in cui esistono soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = k \\ 2x + 4y + (k+1)z = 7 \\ kx + 10y + 17z = 19 \end{cases} \quad .$$

Es. 84. Determinare i valori di k che rendono privo di soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 3z = -2 \\ 7x + 3y + kz = 8 \end{cases} \quad .$$

Es. 85. Discutere l'esistenza di soluzioni, e il loro grado di libertà ∞^c, al variare di $U \in \mathbf{R}$, per il sistema $\begin{cases} Ux + y - z = 0 \\ 2y + Uz = U \\ x - z = 0 \end{cases}$.

Es. 86. Determinare i valori reali di k che rendono risolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = k \\ x + 5y = 2 \\ 3x + ky = 1 \end{cases} \quad .$$

Descrivere, al variare di k, l'evoluzione delle tre rette definite dalle rispettive equazioni.

Es. 87. Discutere i seguenti sistemi al variare di $k \in \mathbf{R}$ e descrivere le relative entità geometriche, sempre al variare di k:

$$1 : \begin{cases} 2x + ky - 5k = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad ; \quad 2 : \begin{cases} 2x + ky - 5 = 0 \\ 2x + 3y - k = 0 \\ 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad 3 : \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 2x + ky = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Es. 88. Risolvere il seguente sistema; interpretare geometricamente le equazioni.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad .$$

Es. 89. Determinare i valori di k (in $\mathbf{R}$) per i quali il sistema $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ ky+z=0 \\ x-2z=3 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni. Interpretare geometricamente le tre equazioni, al variare di k. Infine risolvere il sistema ponendo $k=0$.

Es. 90. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ 4x_1-3x_4=0 \\ 5x_1+2x_3+2x_4=0 \end{cases} .$$

Successivamente, notando che $(1,0,-1,3)$ è una soluzione del sistema avente la stessa parte omogenea del precedente ma termini noti uguali rispettivamente a $4,5,-5,9$, dedurre la soluzione generale di quest'ultimo sistema senza effettuare ulteriori calcoli.

Es. 91. Utilizzando un'interpretazione geometrica, determinare tutte le soluzioni del sistema di *disequazioni* $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ 2x+y-3<0 \end{cases}$.

6

Applicazioni lineari, autovettori, nuove coordinate

Es. 92. Sia F l'applicazione che assegna ad ogni punto (x, y, z) dello spazio la sua *temperatura*, per ipotesi uguale a $x + 2y - 3z$ gradi centigradi (supponiamo, irrealisticamente, che la temperatura possa assumere qualunque valore!), e la sua *altezza*, uguale a z metri. Descrivere il luogo dei punti che hanno temperatura e altezza nulla, poi il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ, infine il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ e una fissata altezza h.

Es. 93. Sia f un'applicazione lineare tra spazi vettoriali reali U e V. Presi s vettori linearmente dipendenti $\underline{u}_1$ ...,$\underline{u}_s$ nel dominio U, dimostrare che $f(\underline{u}_1)$,...,$f(\underline{u}_s)$ sono s vettori linearmente dipendenti nel codominio V. Dimostrare, poi, che la stessa proprietà relativamente all'*indipendenza* lineare vale solo se f è iniettiva.

Es. 94. Due spazi vettoriali U, V si dicono *isomorfi* se esiste un'applicazione lineare $\varphi : U \longrightarrow V$ che sia anche biunivoca (φ è detta un *isomorfismo*). Dimostrare che in presenza di un isomorfismo U e V hanno la stessa dimensione (supporre che la dimensione di U non sia infinita).

Es. 95. Esibire un isomorfismo tra lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti reali e quello delle matrici triangolari superiori di ordine 3 a valori reali, descrivendo esplicitamente le immagini di una data base del dominio.

Es. 96. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica di $\mathbf{R}^2$ alla base $\mathcal{A} = \{(1, 2), (3, 8)\}$, e la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Es. 97. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -1)\}$ alla base $\mathcal{A}' = \{(2, 3), (4, 1)\}$.

Es. 98. Determinare una base del nucleo, una dell'immagine, e le due rispettive dimensioni, per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + 6y + 8z)$. Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Determinare i vettori $\underline{u} \in \mathbf{R}^3$ tali che $f(\underline{u}) = (5, 10)$, cioè calcolare la controimmagine $f^{-1}(5, 10)$. Tenendo presente l'Es. 96, scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{A}$ nel codominio, e successivamente scrivere la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ nel dominio e ad $\mathcal{A}$ nel codominio.

Es. 99. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ tale che $g(1, 0) = (1, 2, 3, 4)$ e $g(0, 1) = (-1, -2, -3, -4)$. Stabilire se l'immagine di g è l'intero codominio $\mathbf{R}^4$. Infine, scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{(2, 1), (2, 3)\}$ del dominio e alla base canonica del codominio, e calcolare $g(8, 6)$ utilizzando tale matrice.

Es. 100. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $f(8, 9) = (8, 9)$ e che $f(9, 10) = (9, 10)$. Dimostrare che f è l'applicazione identità, cioè che $f(\underline{u}) = \underline{u}$ per ogni $\underline{u}$.

Es. 101. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $f(1, 2) = (8, 9)$ e che $f(3, 4) = (16, 18)$. Calcolare una base di $Ker(f)$.

Es. 102. Sia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ una fissata base di uno spazio vettoriale U e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Di un'applicazione lineare $f : U \to V$ è noto che $f(\underline{u}_1) = \underline{0}_V$ e $f(\underline{u}_2) = f(\underline{u}_3) = \underline{v}$ dove $\underline{v}$ è un certo vettore di V, diverso dallo zero. Descrivere la controimmagine di $\underline{v}$. Stabilire se f è suriettiva. Esibire una base del nucleo di f.

Es. 103. Siano U e V due spazi vettoriali le cui basi sono state scelte come $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia data l'applicazione lineare $f : U \to V$ tale che $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$ e $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_1 + 5\underline{v}_2$. Determinare un vettore di V che non abbia controimmagine secondo f.

Es. 104. Dimostrare che l'insieme delle applicazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$, sia esso $\mathcal{L}_3^2$, munito delle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare, è uno spazio vettoriale. Esibirne una base (essa consiste di 6 elementi).

Es. 105. Sia data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(x, y) = (3x + y, 3y)$. Calcolare i vettori del nucleo di f. Stabilire se f è suriettiva e se è diagonalizzabile. Calcolare $f^{-1}(0, 10)$. Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\{(1, 1), (2, 1)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Es. 106. Data l'applicazione lineare $\ell : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$, determinare una base di autovettori che diagonalizzi ℓ. Scrivere la conseguente matrice diagonale, senza calcolare prodotti di matrici.

Es. 107. Calcolare una base di autovettori dell'applicazione lineare definita, mediante le basi canoniche del dominio e del codominio ($\mathbf{R}^3$), dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere anche il relativo prodotto di matrici che diagonalizza A, e scrivere la matrice diagonale risultante.

Es. 108. Trovare le eventuali matrici diagonalizzabili tra le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Es. 109. Sia data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$. Calcolarne: la controimmagine di $(4, 3, 5)$, gli autovalori e almeno un autovettore (nota: un autovalore è uguale a 6). Stabilire se, rispetto a una certa base nel dominio e nel codominio, è vero che $f(X, Y, Z)$ si scrive nella forma $(\alpha X, \beta Y, \gamma Z)$.

Es. 110. Calcolare una base di autovettori (soltanto due) dell'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (4, 1, -2)$, $f(0, 0, 1) = (-4, 2, 5)$. Introdurre poi un vettore perpendicolare alla base trovata e scrivere la matrice di f rispetto alla base estesa (sia nel dominio che nel codominio).

Es. 111. Esibire una base di autovettori per l'applicazione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che trasforma i tre vettori ordinati della base canonica rispettivamente in $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(5, 6, 7)$. È possibile esibire una base ortogonale?

Es. 112. Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché (dimostrare) è possibile trovare una matrice R tale che

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D ,$$

utilizzando l'identità inversa $M = RDR^{-1}$ calcolare M^{10}.

Es. 113. Di un'applicazione lineare g è noto che $g(1,2) = (1,2)$ e che $(2,-1)$ è un autovettore con relativo autovalore uguale a 3. Calcolare $g(1,0)$ e $g(0,1)$. Stabilire se g è suriettiva e se è biunivoca.

Es. 114. Di una funzione f definita da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ è noto che $f(2,3) = f(3,4) = f(5,6) = (1,0,0)$. Possiamo essere certi che questa funzione è lineare? Possiamo essere certi che questa funzione non è lineare? Essa, più debolmente, *potrebbe* essere lineare anche se non è sicuro che lo sia?

Es. 115. Stabilire se $(1,3,0)$ è un autovettore per l'applicazione lineare g di cui è noto che $g(1,1,0) = (2,2,0)$ e $g(0,1,0) = (0,2,0)$.

Es. 116. Sia M una matrice simmetrica di ordine n e sia R una matrice le cui colonne sono autovettori di M a due a due ortogonali e di modulo 1, intendendo M come la matrice di un'applicazione lineare secondo una base fissata nel dominio e nel codominio che sono uguali a $\mathbf{R}^n$ (dunque $R^{-1}MR$ è una matrice diagonale che reca i vari autovalori con le rispettive molteplicità). Dimostrare che in effetti $R^{-1} = R^t$ (questa proprietà fa di R una matrice *ortogonale*; come approfondimento, vedere l'Es. 160).

Es. 117. Dimostrare il teorema spettrale nel caso di matrici simmetriche di ordine 2.

7 Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi

Es. 118. Determinare gli eventuali valori di a che rendono linearmente dipendenti i vettori $(a,1,0,0)$, $(1,a,1,0)$, $(1,1,2,a)$. Scrivere una o più equazioni cartesiane (essenziali) del sottospazio generato da tali vettori per $a=2$.

Es. 119. Calcolare il rango delle matrici

$$T=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix} \quad , \quad U=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Determinare quindi la dimensione, una base ed equazioni cartesiane del sottospazio generato dalle colonne di T, e poi da quelle di U.

Es. 120. Scrivere un insieme minimale di equazioni cartesiane di $T=\langle(1,1,0,0),(1,1,1,2),(0,0,2,4),(1,1,-1,-2)\rangle$.

Es. 121. Dimostrare che cinque vettori a due a due ortogonali di $\mathbf{R}^5$, non nulli, costituiscono una base di tale spazio vettoriale.

Es. 122. Stabilire se esistono valori di h (in $\mathbf{R}$) per i quali i vettori (h,h,h,h), $(h,1,0,-1)$, formano una base ortogonale (di un sottospazio 2-dimensionale di $\mathbf{R}^4$).

Es. 123. Determinare una base ortogonale del sottospazio $W=\langle(1,0,0,1),(1,1,2,0),(0,1,0,1)\rangle$. Estenderla poi a una base di $\mathbf{R}^4$ (non necessariamente ortogonale).

Es. 124. Calcolare la proiezione ortogonale di $(-1,1,2)$ sul sottospazio $S=\langle(1,0,0),(2,0,1),(2,0,0),(3,0,2)\rangle$.

Es. 125. Dopo aver calcolato una base ortogonale del sottospazio S, in $\mathbf{R}^4$, di equazioni $x_1-x_4=x_2-x_4=0$, decomporre il vettore $(2,0,1,0)$ nella proiezione ortogonale e nella componente ortogonale rispetto a S. Successivamente calcolare quest'ultima componente anche come la proiezione ortogonale di $(2,0,1,0)$ sul sottospazio ortogonale $S^\perp$.

Es. 126. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio S di equazione $x-2y+4z=0$. Calcolare la dimensione del sottospazio $S+\langle(4,0,-1)\rangle$.

Es. 127. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,4)$ su $S=\langle(1,1,1),(2,2,2),(3,3,0)\rangle$. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche di S e anche di $S^\perp$.

Es. 128. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,4,2)$ su $S=\langle(1,1,1,1),(2,2,2,2)\rangle$. Calcolare anche la componente ortogonale. Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di S.

Es. 129. Determinare una base, poi equazioni cartesiane e infine parametriche del sottospazio $T=\langle(1,1,0,0),(1,1,1,1),(0,0,3,3)\rangle$. Determinare inoltre equazioni cartesiane di $T^\perp$, la sua dimensione e una base.

Es. 130. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4)$ su $S = \langle(4, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di S e di $S^{\perp}$.

Es. 131. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ rispetto al sottospazio $S : 2x-y+2w-z = x - z = 0$. Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle(1, 3, 1, 2), (0, 0, 0, 1)\rangle$ è una somma diretta.

Es. 132. Determinare le coordinate del vettore $(1, 0, 0)$ rispetto alla base $(\sqrt{2}, 1, 0), (-1, \sqrt{2}, 3)$, $(2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2})$.

Es. 133. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(8, 2, 3)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(2, 5, 6)$, $(1, 1, 0), (0, 0, 3)\rangle$.

Es. 134. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S, in $\mathbf{R}^4$, definito dalla sola equazione $2x + y + 3w - z = 0$.

Es. 135. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S definito dal sistema $2x + y + 3w - z = x - z = y + w + z = 0$.

Es. 136. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi $S = \langle(1, 2, 3, 4), (1, 2, 0, 1)\rangle$ e $T = \langle(0, 1, 0, 1),\ (2, 3, 3, 4)\rangle$.

Es. 137. Uno spazio vettoriale V ha la proprietà di contenere due sottospazi di dimensione 5 la cui intersezione è il solo vettore nullo. Stabilire se $dim(V)$ può essere uguale a 10 e se essa può essere uguale a 11.

Es. 138. Esibire una base del sottospazio $\langle(1, 2, 3, 1), (1, 2, 4, 1)\rangle + \langle(1, 2, 5, 1), (1, 0, 0, 1)\rangle$. Verificare la validità della formula di Grassmann in questo contesto, calcolando esplicitamente la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

Es. 139. In $\mathbf{R}^5$ sono dati i due sottospazi $S : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ e $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Dimostrare che $S + T = \mathbf{R}^5$.

8

Coniche e complementi

Es. 140. Determinare sia il vertice che un'equazione della direttrice, per la parabola di equazione $9x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{10}x = 0$.

Es. 141. Stabilire se $A = (24, -143)$ è un punto allineato con $B = (1, 0)$ e col fuoco della parabola di equazione $y = 3x^2 - 12x$. Esibire la traslazione necessaria per portare il vertice di tale parabola nella nuova origine.

Es. 142. Calcolare i versori degli assi (idonei autovettori normalizzati...) della conica di equazione $2x^2+4xy-y^2-12 = 0$. Calcolare le coordinate di uno dei suoi fuochi, a scelta, e scrivere l'equazione della relativa direttrice.

Es. 143. Sia $P(x, y)$ un polinomio di grado 2 in 2 variabili, avente i monomi in x^2 e y^2 di segno opposto. Dimostrare che l'equazione relativa a P non rappresenta un'ellisse, né una parabola.

Es. 144. Calcolare le coordinate di un fuoco e l'equazione di un asintoto (nel riferimento Oxy) relativamente alla conica di equazione $3x^2 + 4xy + 16 = 0$.

Es. 145. Esibire una formula per calcolare l'eccentricità di un'ellisse come funzione dei due autovalori.

Es. 146. Determinare i valori di p tali che la curva di equazione $x^2+pxy+4y^2+(p-2\sqrt{10})x-6 = 0$ sia una parabola. Successivamente, porre $p = 2\sqrt{10}$; sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta. Esibire un cambiamento di coordinate che dia a $\mathcal{C}$ una forma canonica, e scrivere tale forma. Determinare i fuochi di $\mathcal{C}$, sia nel nuovo riferimento che in quello originale. Calcolare l'eccentricità di $\mathcal{C}$.

Es. 147. Sia data l'iperbole di equazione $3x^2 - 26\sqrt{3}xy - 23y^2 + 144 = 0$. Calcolarne: le direzioni (versori) degli assi, una forma canonica, le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti sia nella forma canonica che in quella iniziale, infine l'eccentricità.

Es. 148. Determinare le direzioni degli assi (autovettori normalizzati) e l'eccentricità della curva di equazione $19x^2 + 24xy + 26y^2 - 140 = 0$.

Es. 149. Scrivere una forma canonica della curva di equazione $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 8y - 2 = 0$. Calcolarne il centro e l'eccentricità.

Es. 150. Scrivere le coordinate di un fuoco e un'equazione della relativa direttrice della curva di equazione $xy - 10 = 0$.

Es. 151. Di una parabola è noto che la direttrice ha equazione $y = 3x + 5$ e il fuoco ha coordinate $(8, 2)$. Stabilire se $(4, 4)$ è un punto della parabola.

Es. 152. Con riferimento all'Es. 151, determinare i punti che appartengono alla parabola ed hanno ordinata nulla.

Es. 153. Sia $\mathcal{C}$ la conica che ha il fuoco e la direttrice come nell'Es. 151 e che inoltre passa per $(4, 4)$. Stabilire se $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

Es. 154. Dato un cono e un piano che lo interseca formando un'ellisse, i *fuochi* di questa ellisse possono essere definiti come i punti di tangenza, su tale piano, delle due sfere inscritte nel cono e appunto tangenti al piano (vedere la figura). Partendo dunque dalla definizione di ellisse come intersezione opportuna di un cono e di un piano, dimostrare che la somma delle distanze dai due fuochi di un punto qualunque dell'ellisse è costante.

Es. 155. Nell'emisfero boreale il periodo primavera-estate dura qualche giorno in più rispetto all'autunno-inverno. Dimostrare che tale discrepanza è legata alla forma ellittica dell'orbita terrestre.

Es. 156. Scrivere un'equazione cartesiana del piano osculatore relativo alla curva γ parametrizzata da $P(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nel punto $P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Es. 157. Calcolare il vettore binormale relativo alla curva γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nel punto $H = (1, 1, 1)$.

Es. 158. Calcolare il raggio di curvatura di γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nell'origine. Calcolare il relativo centro di curvatura.

Es. 159. Sia γ una curva la cui parametrizzazione $P(z)$ genera vettori tangenti di lunghezza costante, uguale a 5. Dimostrare che P'' è ortogonale a P' in ogni punto.

Es. 160. Un *gruppo* è un insieme G munito di un'operazione binaria "$\cdot$" che sia associativa e inoltre preveda l'esistenza di un elemento neutro e tale che $e \cdot g = g \cdot e = g \, \forall g \in G$ e anche l'esistenza di un elemento *inverso* g^{-1}, per ogni $g \in G$, tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. Ad es. l'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ è un gruppo rispetto all'operazione di somma; in questo caso il simbolo $\cdot$ diviene $+$ per dare risalto alla *commutatività* che invece in generale non vale (infatti essa non è prevista negli assiomi di gruppo, insomma non è "di serie"). Oltretutto, il prodotto in $\mathbf{Z}$ ha un significato diverso e non dà luogo a un gruppo (perché?).

Un altro importante esempio di gruppo è quello delle matrici invertibili di ordine fissato, con l'operazione di moltiplicazione; si tratta di un gruppo non commutativo.

Con queste premesse, dimostrare che l'insieme delle matrici cosiddette *ortogonali* di ordine fissato n (le matrici invertibili M di ordine n tali che $M^{-1} = M^t$) formano un gruppo $\mathcal{O}_n$ non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto tra matrici (dunque formano un cosiddetto *sottogruppo* del gruppo delle matrici invertibili di ordine n).

Es. 161. Dimostrare che il seguente insieme, $\mathbf{Z}_n$, per un fissato intero $n \geq 2$, è un gruppo. Definiamo $\mathbf{Z}_n$ come l'insieme dei *resti* della divisione di un numero intero per n, dunque $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], [2], ..., [n-1]\}$; si tratta dell'*insieme quoziente*, in $\mathbf{Z}$, rispetto alla relazione di "avere lo stesso resto modulo n", che equivale (esercizio) alla relazione "n divide la differenza tra i due numeri". Nota: un altro notevole insieme quoziente è quello dei vettori liberi rispetto alla relazione di sovrapponibilità (avere lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso).

Torniamo al caso presente. Dati due resti $[r]$ e $[r']$, definiamo la loro somma come il resto di $a + a'$, dove a ha resto r e a' ha resto r' (in particolare occorrerà dimostrare che la definizione è *ben posta*, cioè essa non dipende dalla scelta di a e a' in $\mathbf{Z}$). Dimostrare dunque che gli interi modulo n formano un gruppo (commutativo).