

Esercizi

di algebra lineare e geometria

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

Anno Accademico 2024 - 2025

Argomenti

p. 3	Matrici
p. 4	Spazi vettoriali, rango, sottospazi
p. 6	Geometria del piano
p. 7	Geometria dello spazio
p. 10	Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica
p. 13	Applicazioni lineari, autovettori, nuove coordinate
p. 16	Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi
p. 18	Coniche e complementi

Es. 1. Calcolare le inverse delle matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi & 0 \\ 0 & 0 & 123 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es. 2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare $CA + B^{-1}$.
Verificare poi il teorema di Binet nel caso del prodotto $B \cdot B$.

Es. 3. Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i 5 rispettivi ranghi. Calcolare A^{-1} e B^{-1} purché ciò sia possibile. Dei prodotti AC , AD , CA , DA calcolare solo quelli leciti.

Es. 4. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 5. Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 6. Calcolare

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

utilizzando la definizione originale di determinante.

Es. 7. Dimostrare che l'inversa di una matrice — se esiste — è unica.

Es. 8. Dimostrare che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (invertibile) è triangolare inferiore.

Es. 9. Esibire, mediante opportuni parametri, tutte le matrici $M \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che $M^2 = I_2$ e tutte le matrici $N \in \mathcal{M}_{2,2}$ tali che N^2 sia la matrice nulla.

Es. 10. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 11. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T \\ T & 0 & T & T \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 12. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 8 & T \\ T & 1 & 8 & 1 \\ 2T & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 13. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} T & 1 & 0 & 2 \\ 1 & T & 0 & 2 \\ 0 & 1 & T & 3 \end{pmatrix}$ al variare di T in $\mathbf{R}$.

Es. 14. Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 0 \\ 8 & 1 & 17 & 7 \end{pmatrix}$.

Es. 15. Determinare gli eventuali valori reali di k tali che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & k+1 & 7 \\ k & 10 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Es. 16. Determinare i valori di k tali che il sottospazio $\langle (1, 1, 0, k), (1, k, 0, 1), (k, -1, 3, 0) \rangle$ abbia dimensione 2.

Es. 17. Determinare i valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(1, 1, 1, 2, k)$, $(k, 1, 3, 3, -2)$, $(7, 3, k, 7, 8)$.

Es. 18. Dimostrare che

$$S = \{(a + 3b - c, 2a + c, 3a + b + c) : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base.

Es. 19. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{S} = \{(a + b + c + d, a, a, b - d) : a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e determinarne una base.

Es. 20. Dati tre vettori linearmente indipendenti $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ di uno spazio vettoriale, dimostrare che $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$, $2\underline{v} + 3\underline{w}$ sono linearmente indipendenti e che invece $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\underline{u} - 3\underline{v} - \underline{w}$ non lo sono.

- Es. 21. Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 3×3 .
- Es. 22. Determinare una base dello spazio vettoriale dei polinomi $p(t)$ a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 4.
- Es. 23. Dimostrare che l'insieme delle funzioni — sia esso $\mathcal{M}$ — da un insieme generico T a uno spazio vettoriale V (sul campo reale), una volta munito delle operazioni di *somma di due funzioni* e di *prodotto di una funzione per uno scalare* diventa uno spazio vettoriale. Nota: la *somma* delle funzioni f e g è la funzione $f +_{\mathcal{M}} g$ che associa a un elemento $t \in T$ l'immagine $f(t) + g(t)$; per brevità possiamo utilizzare lo stesso simbolo $+$, ma ricordiamo che le due somme sono definite su insiemi diversi. Il *prodotto con uno scalare* $\alpha \cdot f$ associa a un elemento t l'immagine $\alpha \cdot f(t)$ (anche in questo caso dovremmo scrivere per esteso $\alpha \cdot_{\mathcal{M}} f$, per il primo prodotto).
- Es. 24. Dimostrare che l'insieme delle funzioni derivabili, da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, è uno spazio vettoriale. I polinomi di grado minore o uguale a 4 formano un sottospazio di tale spazio vettoriale? E i polinomi di grado pari?
- Es. 25. Dimostrare che l'insieme W ottenuto privando $\mathbf{R}^2$ del vettore $(2, 3)$, non è più uno spazio vettoriale (rispetto alle consuete operazioni). Fornire un esempio di sottospazio di $\mathbf{R}^2$ che sia contenuto in W e sia *massimale* — dunque non deve essere contenuto in altri sottospazi che siano contenuti in W .
- Es. 26. Sia $\mathbf{Q}^2$ l'insieme dei vettori $(p, q) \in \mathbf{R}^2$ le cui componenti sono numeri razionali. Dimostrare che tale insieme non è uno spazio vettoriale “sui numeri reali” (dunque rispetto al prodotto con scalari reali).
- Es. 27. Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi, $\mathbf{C}$, munito dell'usuale operazione di somma e dell'operazione di prodotto con scalari reali, è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali. Determinarne poi una base.
- Es. 28. Consideriamo i seguenti tre insiemi che denotiamo con U , V , W rispettivamente: le matrici simmetriche 2×2 ; i polinomi in una variabile, di grado al più 2. I vettori geometrici dello spazio, applicati in un punto comune (ad esempio l'origine), pensati come forze fisiche. Dimostrare che i tre insiemi sono in effetti spazi vettoriali e dimostrare che hanno tutti la stessa dimensione. Concludere mostrando un isomorfismo mediante tre rispettive basi scelte a piacere.

Es. 29. Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per $(8, 0)$ e $(8, 3)$, poi un'equazione della retta passante per $(3, 3)$ e $(-30, -30)$.

Es. 30. Data la retta r di equazione $3x + 4y + 7 = 0$, determinare un'equazione cartesiana della retta parallela a r e passante per $(8, -2)$. Determinare poi un'equazione cartesiana della retta perpendicolare a r e passante per $(0, 2)$.

Es. 31. Che differenza c'è tra il *punto* $(7, 9)$ e il *vettore* $(7, 9)$?

Es. 32. Rappresentare graficamente la retta r descritta in forma parametrica come $x = 6t + 2$, $y = 7t - 4$. Stabilire se i punti $(20, 17)$ e $(20, 18)$ appartengono a r . Scrivere poi una forma cartesiana di r .

Es. 33. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche della retta r passante per $(4, 1)$ e parallela all'asse x . Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{1300}$ dalla retta di equazione $2x + 3y + 5 = 0$.

Es. 34. Calcolare la proiezione ortogonale (scalare non negativo) del vettore $(8, 9)$ sulla retta r : $x - 3y + 102 = 0$.

Es. 35. Calcolare la distanza tra il punto $(8, 9)$ e la retta di equazione $y = 2x - 1$. Inoltre, su tale retta determinare i punti aventi distanza 10 da $(4, 3)$.

Es. 36. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $y = 3x - 1$ e $x = 3y - 3$.

Es. 37. Stabilire se i punti $A : (-3\pi, 1, 5)$, $B : (0, 3, 5)$ e $C : (9\pi, 9, 6)$ sono allineati. Stabilire se essi sono complanari.

Es. 38. Stabilire se i punti $(\sqrt{2}, 2, 3)$, $(1, -1, 1)$, $(\sqrt{2}, 1, 0)$ sono allineati. Stabilire se tali punti, insieme a $(0, 0, 1)$, sono complanari.

Es. 39. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0, 1, 0)$, $(-1, -2, -3)$ e parallelo al vettore $(0, 2, 1)$.

Es. 40. Determinare un'equazione del piano contenente l'asse x e passante per $(4, 4, 7)$.

Es. 41. Determinare e in modo che il punto $A = (1, 2, e)$ giaccia nel piano contenente l'origine e i punti $B = (1, 1, 1)$, $C = (3, 2, 1)$. Successivamente scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse y e contenente i punti B , C .

Es. 42. Descrivere con un'unica equazione cartesiana (dipendente da parametri) la totalità dei piani passanti per il punto $P = (9, 8, 7)$.

Es. 43. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente equazioni parametriche: $x = 3t - 1$, $y = 3t + 1$, $z = 8$. Stabilire se essa è contenuta nel piano $\pi : x + 1 = 0$.

Es. 44. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(8, 2, 3)$ e parallela al vettore $(0, 3, 1)$.

Es. 45. Tra i piani passanti per $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ determinare quello parallelo alla retta $r : x - y - 5 = y + z + 4 = 0$.

Es. 46. Stabilire se esistono valori di k tali che il piano $\pi : x + 2y + kz = 4$ sia parallelo alla retta $\rho : x + y - 3 = y + z - 1 = 0$ (e non la contenga).

Es. 47. Determinare equazioni cartesiane, e anche parametriche, della retta passante per $(8, 0, 1)$ e parallela al vettore $(0, 10, 0)$.

Es. 48. Scrivere equazioni parametriche della retta r passante per $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 4, -5)$. Utilizzando tali equazioni, aggiungere una condizione per descrivere parametricamente il *segmento* AB .

Es. 49. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P : (1, 2, 0)$, incidente la retta $s : x - y = y - z - 1 = 0$ e parallela al piano $\pi : 3x - z = 4$.

Es. 50. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $P(1, 1, 1)$, incidente l'asse z e parallela al piano di equazione $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Es. 51. Determinare equazioni cartesiane della retta incidente le rette $r : x - 1 = y - 1 = 0$, $s : x + 2z = y + z + 1 = 0$ e passante per l'origine.

Es. 52. Stabilire se il piano di equazione $x - y = 1$ è parallelo alla retta passante per l'origine e per $(1, 2, 3)$.

Es. 53. Stabilire se le rette $\rho : x + y = x + z - 1 = 0$, $\sigma : x + y = x - z = 0$, $\tau : 2x + y - z = y + z = 0$ giacciono in un piano comune.

Es. 54. Determinare equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta $r : x = y - z = 0$ e distanti 1 dal punto $(0, 0, 3)$.

Es. 55. Dopo aver verificato che le rette $r : x = z - 2 = 0$ e $s : x + y = y - 4 = 0$ sono sghembe, scrivere equazioni cartesiane della retta che le interseca perpendicolarmente.

Es. 56. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 4y = 9$ e il punto d'intersezione tra l'asse y e la retta di equazioni parametriche: $x = t, y = t + 1, z = t$.

Es. 57. Stabilire se il vettore $(4, 5, 1)$ e la retta $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$ formano un angolo di 60 gradi.

Es. 58. Dopo aver verificato che le rette $r : x + y = y + z + 1 = 0$, $s : x + 2y + z - 8 = x - z - 9 = 0$ sono parallele, calcolare la loro distanza.

Es. 59. Tra i piani perpendicolari alla retta $r : x - y - z = x + y + z - 5 = 0$, determinare quello passante per il punto $(8, 8, 9)$.

Es. 60. Tra i piani contenenti l'asse x , determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di 45° col piano $\pi : 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

Es. 61. Stabilire se le rette r e s , espresse in forma parametrica come $r : (2 + t, -t, 3)$ e $s : (t + 1, t - 1, 2t + 1)$ sono sghembe. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente la direzione perpendicolare a entrambe le rette date, e passante per $(1, 2, 3)$.

Es. 62. In un riferimento $Oxyz$ è data la retta $r : x - y + 2 = 2x + y + z - 4 = 0$. Descrivere mediante un sistema di equazioni cartesiane la totalità delle rette perpendicolari a r e passanti per $P = (1, 3, -1)$. Successivamente risolvere lo stesso problema con la condizione che le rette formino un angolo di 60° con r .

Es. 63. Scrivere equazioni cartesiane della retta che interseca le rette $r : x = y = 0$ e $r' : x - 3 = z = 0$ formando angoli di 60° con ciascuna retta.

Es. 64. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'intersezione dei tre piani $\pi_1 : x - 1 = 0$, $\pi_2 : x + y = 2$, $\pi_3 : y - z = 8$ e perpendicolare a π_3 .

Es. 65. Tra i punti della retta $r : x + z + 4 = x + y + z - 1 = 0$, determinare quelli distanti 5 dal piano $\alpha : x - z = 10$, poi quelli distanti 5 dal punto $(-2, 1, 1)$.

Es. 66. Calcolare il coseno positivo dell'angolo θ formato dall'asse x con la retta di equazione $x - 3y = y - z + 3 = 0$. Stabilire se θ è minore di 60 gradi.

Es. 67. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x + y = 8$ e $\pi' : x + 2y - 4z = 9$.

Es. 68. Determinare la distanza tra le rette (parallele) $s : x + y + 2z = x - 3 = 0$ e $s' : y + 2z + 8 = x - 4 = 0$.

Es. 69. Verificare che le seguenti rette, r e s , sono parallele:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Calcolare poi il coseno (≥ 0) dell'angolo formato da r col vettore $\vec{i} - 3\vec{k}$.

Es. 70. Scrivere un'equazione del piano passante per $(8, 4, 2)$ e perpendicolare sia al piano $\alpha : x = 2$ che al piano $\beta : x + y + z = 5$. Stabilire se la retta $r : x - z = y + 2z + 9 = 0$ è parallela a β .

Es. 71. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0, 1, 0)$ e perpendicolare al vettore $(2, 4, 5)$. Determinare il coseno dell'angolo formato da tale piano col piano di equazione $z = 56$, e il coseno dell'angolo formato con l'asse y .

Es. 72. Scrivere equazioni cartesiane della retta che taglia perpendicolarmente l'asse y e la retta $r : x - y = x + y + 2z + 1 = 0$. Calcolare la minima distanza tra queste ultime due rette.

Es. 73. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(1, 2, 4)$ e perpendicolare al piano di equazione $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Es. 74. Scrivere equazioni cartesiane delle due rette passanti per $Q = (3, 5, 4)$, tangenti alla sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 20 = 0$ e parallele al piano $\pi : x - 1 = 0$.

Es. 75. Verificare che l'insieme $\{\underline{v} \in \mathbf{R}^3 : \underline{v} \times (7, 8, 9) = 0\}$ è un sottospazio. Determinarne la dimensione e una base.

Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica

Es. 76. Risolvere i due seguenti sistemi, col metodo di Cramer.

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} , \quad 2 : \begin{cases} 7x = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} .$$

Es. 77. Trovare tutte le eventuali soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 41y = 0 \end{cases} , \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases} , \quad 3 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

$$4 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases} , \quad 5 : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} .$$

Disegnare le corrispondenti rette, sia mediante tabelle che con lo studio del coefficiente angolare e della quota. Giustificare geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate.

Es. 78. Solo nel secondo dei due seguenti sistemi la terza equazione si può ottenere “sommando” le due equazioni superiori, preventivamente moltiplicate per certi numeri (verificarlo). Dedurre che il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ammette un’unica soluzione — è cioè “compatibile” poiché conduce all’identità $0 = 0$.

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 21 \end{cases} \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 20 \end{cases} .$$

Es. 79. Calcolare (se esistono) tutte le soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$a : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \end{cases} , \quad b : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} , \quad c : \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} , \quad d : \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} .$$

Interpretare tali sistemi come intersezioni di opportuni enti geometrici.

Es. 80. Trovare tutte le soluzioni (purché ve ne siano) per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 4x + 6y + 6z = 9 \end{cases} \quad 3 : \begin{cases} 3x - 6y + w + z = 0 \\ 3y + w - 2z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Descrivere geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate, per ciascun sistema.

Es. 81. Dimostrare che un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango per colonne della matrice incompleta coincide col rango per colonne della completa.

Es. 82. Discutere i seguenti sistemi parametrici, al variare di $k \in \mathbf{R}$:

$$a : \begin{cases} kx + 3y = k \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} , \quad b : \begin{cases} kx + 3y + 5z = 0 \\ x + 6y + 10z = 0 \end{cases} .$$

Interpretare tali sistemi come intersezione di opportuni enti geometrici, al variare di k .

Es. 83. Al variare di $k \in \mathbf{R}$, studiare la risolubilità del seguente sistema, in particolare specificando il numero di parametri nei casi in cui esistono soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = k \\ 2x + 4y + (k + 1)z = 7 \\ kx + 10y + 17z = 19 \end{cases} .$$

Es. 84. Determinare i valori di k che rendono privo di soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 3z = -2 \\ 7x + 3y + kz = 8 \end{cases} .$$

Es. 85. Discutere l'esistenza di soluzioni, e il loro grado di libertà ∞^c , al variare di $U \in \mathbf{R}$, per il

sistema $\begin{cases} Ux + y - z = 0 \\ 2y + Uz = U \\ x - z = 0 \end{cases} .$

Es. 86. Determinare i valori reali di k che rendono risolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = k \\ x + 5y = 2 \\ 3x + ky = 1 \end{cases} .$$

Descrivere, al variare di k , l'evoluzione delle tre rette definite dalle rispettive equazioni.

Es. 87. Discutere i seguenti sistemi al variare di $k \in \mathbf{R}$ e descrivere le relative entità geometriche, sempre al variare di k :

$$1 : \begin{cases} 2x + ky - 5k = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} ; \quad 2 : \begin{cases} 2x + ky - 5 = 0 \\ 2x + 3y - k = 0 \\ 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad 3 : \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 2x + ky = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Es. 88. Risolvere il seguente sistema; interpretare geometricamente le equazioni.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases} .$$

Es. 89. Determinare i valori di k (in $\mathbf{R}$) per i quali il sistema $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ ky + z = 0 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni. Interpretare geometricamente le tre equazioni, al variare di k . Infine risolvere il sistema ponendo $k = 0$.

Es. 90. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Successivamente, notando che $(1, 0, -1, 3)$ è una soluzione del sistema avente la stessa parte omogenea del precedente ma termini noti uguali rispettivamente a 4, 5, -5, 9, dedurre la soluzione generale di quest'ultimo sistema senza effettuare ulteriori calcoli.

Es. 91. Utilizzando un'interpretazione geometrica, determinare tutte le soluzioni del sistema di disequazioni $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$.

Es. 92. Sia F l'applicazione che assegna ad ogni punto (x, y, z) dello spazio la sua *temperatura*, per ipotesi uguale a $x + 2y - 3z$ gradi centigradi (supponiamo, irrealisticamente, che la temperatura possa assumere qualunque valore!), e la sua *altezza*, uguale a z metri. Descrivere il luogo dei punti che hanno temperatura e altezza nulla, poi il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ , infine il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura τ e una fissata altezza h .

Es. 93. Sia f un'applicazione lineare tra spazi vettoriali reali U e V . Presi s vettori linearmente dipendenti $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_s$ nel dominio U , dimostrare che $f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_s)$ sono s vettori linearmente dipendenti nel codominio V . Dimostrare, poi, che la stessa proprietà relativamente all'*indipendenza* lineare vale solo se f è iniettiva.

Es. 94. Due spazi vettoriali U, V si dicono *isomorfi* se esiste un'applicazione lineare $\varphi : U \rightarrow V$ che sia anche biunivoca (φ è detta un *isomorfismo*). Dimostrare che in presenza di un isomorfismo U e V hanno la stessa dimensione (supporre che la dimensione di U non sia infinita).

Es. 95. Esibire un isomorfismo tra lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti reali e quello delle matrici triangolari superiori di ordine 3 a valori reali, descrivendo esplicitamente le immagini di una data base del dominio.

Es. 96. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica di $\mathbf{R}^2$ alla base $\mathcal{A} = \{(1, 2), (3, 8)\}$, e la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Es. 97. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -1)\}$ alla base $\mathcal{A}' = \{(2, 3), (4, 1)\}$.

Es. 98. Determinare una base del nucleo, una dell'immagine, e le due rispettive dimensioni, per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + 6y + 8z)$. Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Determinare i vettori $\underline{u} \in \mathbf{R}^3$ tali che $f(\underline{u}) = (5, 10)$, cioè calcolare la controimmagine $f^{-1}(5, 10)$. Tenendo presente l'Es. 96, scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{A}$ nel codominio, e successivamente scrivere la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ nel dominio e ad $\mathcal{A}$ nel codominio.

Es. 99. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tale che $g(1, 0) = (1, 2, 3, 4)$ e $g(0, 1) = (-1, -2, -3, -4)$. Stabilire se l'immagine di g è l'intero codominio $\mathbf{R}^4$. Infine, scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{(2, 1), (2, 3)\}$ del dominio e alla base canonica del codominio, e calcolare $g(8, 6)$ utilizzando tale matrice.

Es. 100. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ è noto che $f(8, 9) = (8, 9)$ e che $f(9, 10) = (9, 10)$. Dimostrare che f è l'applicazione identità, cioè che $f(\underline{u}) = \underline{u}$ per ogni $\underline{u}$.

Es. 101. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ è noto che $f(1, 2) = (8, 9)$ e che $f(3, 4) = (16, 18)$. Calcolare una base di $\text{Ker}(f)$.

Es. 102. Sia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ una fissata base di uno spazio vettoriale U e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Di un'applicazione lineare $f : U \rightarrow V$ è noto che $f(\underline{u}_1) = \underline{0}_V$ e $f(\underline{u}_2) = f(\underline{u}_3) = \underline{v}$ dove $\underline{v}$ è un certo vettore di V , diverso dallo zero. Descrivere la controimmagine di $\underline{v}$. Stabilire se f è suriettiva. Esibire una base del nucleo di f .

Es. 103. Siano U e V due spazi vettoriali le cui basi sono state scelte come $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia data l'applicazione lineare $f : U \rightarrow V$ tale che $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$ e $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_1 + 5\underline{v}_2$. Determinare un vettore di V che non abbia controimmagine secondo f .

Es. 104. Dimostrare che l'insieme delle applicazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$, sia esso $\mathcal{L}_3^2$, munito delle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare, è uno spazio vettoriale. Esibirne una base (essa consiste di 6 elementi).

Es. 105. Sia data $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tale che $f(x, y) = (3x + y, 3y)$. Calcolare i vettori del nucleo di f . Stabilire se f è suriettiva e se è diagonalizzabile. Calcolare $f^{-1}(0, 10)$. Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\{(1, 1), (2, 1)\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Es. 106. Data l'applicazione lineare $\ell : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$, determinare una base di autovettori che diagonalizzi ℓ . Scrivere la conseguente matrice diagonale, senza calcolare prodotti di matrici.

Es. 107. Calcolare una base di autovettori dell'applicazione lineare definita, mediante le basi canoniche del dominio e del codominio ($\mathbf{R}^3$), dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere anche il relativo prodotto di matrici che diagonalizza A , e scrivere la matrice diagonale risultante.

Es. 108. Trovare le eventuali matrici diagonalizzabili tra le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es. 109. Sia data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$. Calcolarne: la controimmagine di $(4, 3, 5)$, gli autovalori e almeno un autovettore (nota: un autovalore è uguale a 6). Stabilire se, rispetto a una certa base nel dominio e nel codominio, è vero che $f(X, Y, Z)$ si scrive nella forma $(\alpha X, \beta Y, \gamma Z)$.

Es. 110. Calcolare una base di autovettori (soltanto due) dell'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (4, 1, -2)$, $f(0, 0, 1) = (-4, 2, 5)$. Introdurre poi un vettore perpendicolare alla base trovata e scrivere la matrice di f rispetto alla base estesa (sia nel dominio che nel codominio).

Es. 111. Esibire una base di autovettori per l'applicazione $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ che trasforma i tre vettori ordinati della base canonica rispettivamente in $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(5, 6, 7)$. È possibile esibire una base ortogonale?

Es. 112. Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché (dimostrare) è possibile trovare una matrice R tale che

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D,$$

utilizzando l'identità inversa $M = RDR^{-1}$ calcolare M^{10} .

Es. 113. Di un'applicazione lineare g è noto che $g(1, 2) = (1, 2)$ e che $(2, -1)$ è un autovettore con relativo autovalore uguale a 3. Calcolare $g(1, 0)$ e $g(0, 1)$. Stabilire se g è suriettiva e se è biunivoca.

Es. 114. Di una funzione f definita da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ è noto che $f(2, 3) = f(3, 4) = f(5, 6) = (1, 0, 0)$. Possiamo essere certi che questa funzione è lineare? Possiamo essere certi che questa funzione non è lineare? Essa, più debolmente, *potrebbe* essere lineare anche se non è sicuro che lo sia?

Es. 115. Stabilire se $(1, 3, 0)$ è un autovettore per l'applicazione lineare g di cui è noto che $g(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$ e $g(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$.

Es. 116. Sia M una matrice simmetrica di ordine n e sia R una matrice le cui colonne sono autovettori di M a due a due ortogonali e di modulo 1, intendendo M come la matrice di un'applicazione lineare secondo una base fissata nel dominio e nel codominio che sono uguali a $\mathbf{R}^n$ (dunque $R^{-1}MR$ è una matrice diagonale che reca i vari autovalori con le rispettive molteplicità). Dimostrare che in effetti $R^{-1} = R^t$ (questa proprietà fa di R una matrice *ortogonale*; come approfondimento, vedere l'Es. 160).

Es. 117. Dimostrare il teorema spettrale nel caso di matrici simmetriche di ordine 2.

Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi

Es. 118. Determinare gli eventuali valori di a che rendono linearmente dipendenti i vettori $(a, 1, 0, 0)$, $(1, a, 1, 0)$, $(1, 1, 2, a)$. Scrivere una o più equazioni cartesiane (essenziali) del sottospazio generato da tali vettori per $a = 2$.

Es. 119. Calcolare il rango delle matrici

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare quindi la dimensione, una base ed equazioni cartesiane del sottospazio generato dalle colonne di T , e poi da quelle di U .

Es. 120. Scrivere un insieme minimale di equazioni cartesiane di $T = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2), (0, 0, 2, 4), (1, 1, -1, -2) \rangle$.

Es. 121. Dimostrare che cinque vettori a due a due ortogonali di $\mathbf{R}^5$, non nulli, costituiscono una base di tale spazio vettoriale.

Es. 122. Stabilire se esistono valori di h (in $\mathbf{R}$) per i quali i vettori (h, h, h, h) , $(h, 1, 0, -1)$, formano una base ortogonale (di un sottospazio 2-dimensionale di $\mathbf{R}^4$).

Es. 123. Determinare una base ortogonale del sottospazio $W = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 1, 2, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$. Estenderla poi a una base di $\mathbf{R}^4$ (non necessariamente ortogonale).

Es. 124. Calcolare la proiezione ortogonale di $(-1, 1, 2)$ sul sottospazio $S = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 0), (3, 0, 2) \rangle$.

Es. 125. Dopo aver calcolato una base ortogonale del sottospazio S , in $\mathbf{R}^4$, di equazioni $x_1 - x_4 = x_2 - x_4 = 0$, decomporre il vettore $(2, 0, 1, 0)$ nella proiezione ortogonale e nella componente ortogonale rispetto a S . Successivamente calcolare quest'ultima componente anche come la proiezione ortogonale di $(2, 0, 1, 0)$ sul sottospazio ortogonale $S^\perp$.

Es. 126. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio S di equazione $x - 2y + 4z = 0$. Calcolare la dimensione del sottospazio $S + \langle (4, 0, -1) \rangle$.

Es. 127. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 4)$ su $S = \langle (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 0) \rangle$. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche di S e anche di $S^\perp$.

Es. 128. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 4, 2)$ su $S = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2) \rangle$. Calcolare anche la componente ortogonale. Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di S .

Es. 129. Determinare una base, poi equazioni cartesiane e infine parametriche del sottospazio $T = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 3, 3) \rangle$. Determinare inoltre equazioni cartesiane di $T^\perp$, la sua dimensione e una base.

Es. 130. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4)$ su $S = \langle (4, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di S e di $S^\perp$.

Es. 131. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ rispetto al sottospazio $S : 2x - y + 2w - z = x - z = 0$. Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle (1, 3, 1, 2), (0, 0, 0, 1) \rangle$ è una somma diretta.

Es. 132. Determinare le coordinate del vettore $(1, 0, 0)$ rispetto alla base $(\sqrt{2}, 1, 0), (-1, \sqrt{2}, 3), (2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2})$.

Es. 133. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(8, 2, 3)$ rispetto al sottospazio $S = \langle (2, 5, 6), (1, 1, 0), (0, 0, 3) \rangle$.

Es. 134. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S , in $\mathbf{R}^4$, definito dalla sola equazione $2x + y + 3w - z = 0$.

Es. 135. Decomporre il vettore $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$ in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio S definito dal sistema $2x + y + 3w - z = x - z = y + w + z = 0$.

Es. 136. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi $S = \langle (1, 2, 3, 4), (1, 2, 0, 1) \rangle$ e $T = \langle (0, 1, 0, 1), (2, 3, 3, 4) \rangle$.

Es. 137. Uno spazio vettoriale V ha la proprietà di contenere due sottospazi di dimensione 5 la cui intersezione è il solo vettore nullo. Stabilire se $\dim(V)$ può essere uguale a 10 e se essa può essere uguale a 11.

Es. 138. Esibire una base del sottospazio $\langle (1, 2, 3, 1), (1, 2, 4, 1) \rangle + \langle (1, 2, 5, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle$. Verificare la validità della formula di Grassmann in questo contesto, calcolando esplicitamente la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

Es. 139. In $\mathbf{R}^5$ sono dati i due sottospazi $S : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ e $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Dimostrare che $S + T = \mathbf{R}^5$.

Es. 140. Determinare sia il vertice che un'equazione della direttrice, per la parabola di equazione $9x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{10}x = 0$.

Es. 141. Stabilire se $A = (24, -143)$ è un punto allineato con $B = (1, 0)$ e col fuoco della parabola di equazione $y = 3x^2 - 12x$. Esibire la traslazione necessaria per portare il vertice di tale parabola nella nuova origine.

Es. 142. Calcolare i versori degli assi (idonei autovettori normalizzati...) della conica di equazione $2x^2 + 4xy - y^2 - 12 = 0$. Calcolare le coordinate di uno dei suoi fuochi, a scelta, e scrivere l'equazione della relativa direttrice.

Es. 143. Sia $P(x, y)$ un polinomio di grado 2 in 2 variabili, avente i monomi in x^2 e y^2 di segno opposto. Dimostrare che l'equazione relativa a P non rappresenta un'ellisse, né una parabola.

Es. 144. Calcolare le coordinate di un fuoco e l'equazione di un asintoto (nel riferimento Oxy) relativamente alla conica di equazione $3x^2 + 4xy + 16 = 0$.

Es. 145. Esibire una formula per calcolare l'eccentricità di un'ellisse come funzione dei due autovalori.

Es. 146. Determinare i valori di p tali che la curva di equazione $x^2 + pxy + 4y^2 + (p - 2\sqrt{10})x - 6 = 0$ sia una parabola. Successivamente, porre $p = 2\sqrt{10}$; sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta. Esibire un cambiamento di coordinate che dia a $\mathcal{C}$ una forma canonica, e scrivere tale forma. Determinare i fuochi di $\mathcal{C}$, sia nel nuovo riferimento che in quello originale. Calcolare l'eccentricità di $\mathcal{C}$.

Es. 147. Sia data l'iperbole di equazione $3x^2 - 26\sqrt{3}xy - 23y^2 + 144 = 0$. Calcolarne: le direzioni (versori) degli assi, una forma canonica, le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti sia nella forma canonica che in quella iniziale, infine l'eccentricità.

Es. 148. Determinare le direzioni degli assi (autovettori normalizzati) e l'eccentricità della curva di equazione $19x^2 + 24xy + 26y^2 - 140 = 0$.

Es. 149. Scrivere una forma canonica della curva di equazione $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 8y - 2 = 0$. Calcolarne il centro e l'eccentricità.

Es. 150. Scrivere le coordinate di un fuoco e un'equazione della relativa direttrice della curva di equazione $xy - 10 = 0$.

Es. 151. Di una parabola è noto che la direttrice ha equazione $y = 3x + 5$ e il fuoco ha coordinate $(8, 2)$. Stabilire se $(4, 4)$ è un punto della parabola.

Es. 152. Con riferimento all'Es. 151, determinare i punti che appartengono alla parabola ed hanno ordinata nulla.

Es. 153. Sia $\mathcal{C}$ la conica che ha il fuoco e la direttrice come nell'Es. 151 e che inoltre passa per $(4, 4)$. Stabilire se $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

Es. 154. Dato un cono e un piano che lo interseca formando un'ellisse, i *fuochi* di questa ellisse possono essere definiti come i punti di tangenza, su tale piano, delle due sfere inscritte nel cono e appunto tangenti al piano (vedere la figura). Partendo dunque dalla definizione di ellisse come intersezione opportuna di un cono e di un piano, dimostrare che la somma delle distanze dai due fuochi di un punto qualunque dell'ellisse è costante.

Es. 155. Nell'emisfero boreale il periodo primavera-estate dura qualche giorno in più rispetto all'autunno-inverno. Dimostrare che tale discrepanza è legata alla forma ellittica dell'orbita terrestre.

Es. 156. Scrivere un'equazione cartesiana del piano osculatore relativo alla curva γ parametrizzata da $P(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nel punto $P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Es. 157. Calcolare il vettore binormale relativo alla curva γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nel punto $H = (1, 1, 1)$.

Es. 158. Calcolare il raggio di curvatura di γ definita da $P(t) = (t, t^2, t^3)$, nell'origine. Calcolare il relativo centro di curvatura.

Es. 159. Sia γ una curva la cui parametrizzazione $P(z)$ genera vettori tangenti di lunghezza costante, uguale a 5. Dimostrare che P'' è ortogonale a P' in ogni punto.

Es. 160. Un *gruppo* è un insieme G munito di un'operazione binaria “ $\cdot$ ” che sia associativa e inoltre preveda l'esistenza di un elemento neutro e tale che $e \cdot g = g \cdot e = g \forall g \in G$ e anche l'esistenza di un elemento *inverso* g^{-1} , per ogni $g \in G$, tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. Ad es. l'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ è un gruppo rispetto all'operazione di somma; in questo caso il simbolo $\cdot$ diviene $+$ per dare risalto alla *commutatività* che invece in generale non vale (infatti essa non è prevista negli assiomi di gruppo, insomma non è “di serie”). Oltretutto, il prodotto in $\mathbf{Z}$ ha un significato diverso e non dà luogo a un gruppo (perché?).

Un altro importante esempio di gruppo è quello delle matrici invertibili di ordine fissato, con l'operazione di moltiplicazione; si tratta di un gruppo non commutativo.

Con queste premesse, dimostrare che l'insieme delle matrici cosiddette *ortogonali* di ordine fissato n (le matrici invertibili M di ordine n tali che $M^{-1} = M^t$) formano un gruppo $\mathcal{O}_n$ non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto tra matrici (dunque formano un cosiddetto *sottogruppo* del gruppo delle matrici invertibili di ordine n).

Es. 161. Dimostrare che il seguente insieme, $\mathbf{Z}_n$, per un fissato intero $n \geq 2$, è un gruppo. Definiamo $\mathbf{Z}_n$ come l'insieme dei *resti* della divisione di un numero intero per n , dunque $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$; si tratta dell'*insieme quoziente*, in $\mathbf{Z}$, rispetto alla relazione di “avere lo stesso resto modulo n ”, che equivale (esercizio) alla relazione “ n divide la differenza tra i due numeri”. Nota: un altro notevole insieme quoziente è quello dei vettori liberi rispetto alla relazione di sovrapposibilità (avere lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso).

Torniamo al caso presente. Dati due resti $[r]$ e $[r']$, definiamo la loro somma come il resto di $a + a'$, dove a ha resto r e a' ha resto r' (in particolare occorrerà dimostrare che la definizione è *ben posta*, cioè essa non dipende dalla scelta di a e a' in $\mathbf{Z}$). Dimostrare dunque che gli interi modulo n formano un gruppo (commutativo).