Esercizio A.

Determinare i valori reali di k che rendono risolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = k \\ x + 5y = 2 \\ 3x + ky = 1 \end{cases} .$$

Descrivere, al variare di k, l'evoluzione delle tre rette definite dalle rispettive equazioni.

Sol. Consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & k & 1 \end{array}\right) .$$

Riduciamola a gradini nel modo più "scolastico": le prime due operazioni da effettuare sono

$$\underline{r}_2 \to 2\underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad , \quad \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \frac{3}{2}\underline{r}_1 \quad ,$$

ma in alternativa alla seconda operazione possiamo utilizzare la più comoda

$$\underline{r}_3 \to 2\underline{r}_3 - 3\underline{r}_1 \quad ,$$

con i "contrappesi". Otteniamo la nuova matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 0 & 7 & 4-k \\ 0 & 2k-9 & 2-3k \end{array}\right) .$$

Notiamo che le due operazioni possono essere effettuate in parallelo, contemporaneamente, visto che ciascuna utilizza sempre la riga $\underline{r}_1$, invariata. Ora dobbiamo azzerare il valore $2k - 9$ del posto $(3, 2)$ sfruttando il 7 nel posto superiore. L'operazione migliore è

$$\underline{r}_3 \to 7\underline{r}_3 - (2k-9)\underline{r}_2 \quad .$$

La matrice triangolare che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & k \\ 0 & 7 & 4-k \\ 0 & 0 & \omega \end{array}\right) ,$$

dove $\omega = 7(2 - 3k) - (2k - 9)(4 - k) = 2k^2 - 38k + 50$. Il sistema sarà risolubile se e solo se $\omega = 0$. Ciò avviene per i valori

$$k = \frac{19 \pm \sqrt{261}}{2} .$$

Siamo in presenza di tre rette che hanno un'intersezione simultanea soltanto per i due valori di k appena trovati. La seconda retta è fissa; la prima varia in un fascio improprio — tutte rette parallele; la terza varia in un fascio proprio — rette aventi un punto in comune, precisamente $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ che emerge dopo aver isolato il monomio contenente k. Al variare di k le prime due rette hanno sempre un punto d'intersezione, ma deve anche accadere che la terza retta, ruotando, intercetti tale punto esattamente per lo stesso valore di k. Insomma, interpretando k come il tempo, il momento in cui le rette si incontrano deve essere lo stesso per tutte. Questo accade in effetti in due momenti precisi, come abbiamo visto, non soltanto uno.

Esercizio B.

Consideriamo i seguenti tre insiemi che denotiamo con U, V, W rispettivamente: le matrici simmetriche 2×2; i polinomi in una variabile, di grado al più 2. I vettori geometrici dello spazio, applicati in un punto comune (ad esempio l'origine), pensati come forze fisiche. Dimostrare che i tre insiemi sono in effetti spazi vettoriali e dimostrare che hanno tutti la stessa dimensione. Concludere mostrando un isomorfismo mediante tre rispettive basi scelte a piacere.

Sol. L'insieme U è contenuto nello spazio vettoriale costituito da tutte le matrici 2×2, quindi è sufficiente verificare la proprietà di chiusura: date due matrici simmetriche S, T e dati due numeri reali α, β, certamente $\alpha S + \beta T$ è ancora una matrice simmetrica.

Per l'insieme V vale un discorso analogo, questa volta all'interno dello spazio vettoriale formato da tutti i polinomi. La combinazione lineare $\alpha f + \beta g$ restituisce ancora un polinomio di grado al più 2, supponendo ovviamente che lo siano f e g.

Nel caso del terzo insieme, W, dobbiamo invece verificare tutti gli assiomi perché non ci troviamo all'interno di uno "spazio vettoriale madre" in cui lavorare. La validità di tali assiomi segue comunque da semplici considerazioni geometriche lasciate come approfondimento.

Tutti questi spazi vettoriali hanno dimensione 3. Come esempio di basi possiamo infatti prendere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} , \ \{1, x, x^2\} \ , \ \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \ .$$

Pur non esistendo alcuna relazione naturale tra questi tre insiemi di vettori, è sempre possibile istituire un isomorfismo decidendo arbitrariamente gli accoppiamenti. Ad esempio, un criterio è quello di accoppiare due elementi delle rispettive basi se essi occupano ordinatamente lo stesso posto all'interno delle parentesi graffe. Non esiste alcuna ragione superiore nell'associare il polinomio x al vettore geometrico $\mathbf{j}$ o alla matrice simmetrica contenente due 1 ! Si tratta di una scelta come tante altre (quante? Sei... anzi trentasei... dimostrare...).

A questo punto, mediante tre *coordinate* p, q, r è possibile descrivere qualunque matrice simmetrica

$$p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} ,$$

come anche un polinomio qualsiasi

$$p \cdot 1 + q \cdot x + r \cdot x^2 = rx^2 + qx + p \ ,$$

e infine anche un vettore dello spazio,

$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \ .$$

Insomma, matrici, polinomi e vettori perdono le loro caratteristiche peculiari e vengono uniformati, omologati mediante tre numeri che li rappresentano. Non è più possibile distinguere un vettore da una matrice! Infatti lo spazio vettoriale nascosto dietro a questi tre non è altro che il buon vecchio $\mathbf{R}^3$, semplice da definire ma tanto potente da saper descrivere qualunque altro spazio vettoriale di dimensione 3, essendo $\mathbf{R}^3$ appunto isomorfo a un tale spazio. Bastano quindi gli spazi $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, ... $\mathbf{R}^n$, ... per i nostri ragionamenti, purché decidiamo di attivare la nozione di isomorfismo (e non è sempre un bene!).

Esercizio C.

Determinare gli eventuali valori reali di k tali che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & k \\ 2 & 4 & k+1 & 7 \\ k & 10 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2.

Sol. In questo contesto il teorema degli orlati sembra essere competitivo rispetto alla riduzione a gradini o alla ricerca di combinazioni lineari esplicite. Anziché spendere tempo per riflettere sulla strategia migliore, procediamo appunto col calcolo di due minori orlati anche se resta il dubbio sul tempo che impiegheremo rispetto ad altri metodi. Una sottomatrice invariante e con determinante non nullo è quella relativa alle righe 2, 3 e alle colonne 2, 4. Considerando i suoi orli, imponiamo che siano nulli i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 4 & 7 \\ k & 10 & 19 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & k \\ 4 & k+1 & 7 \\ 10 & 17 & 19 \end{vmatrix} \quad .$$

Dividendo per 2 la colonna $(2,4,10)^t$ non cambierà la nullità o meno del determinante. Studiamo dunque i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 7 \\ k & 5 & 19 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & k \\ 2 & k+1 & 7 \\ 5 & 17 & 19 \end{vmatrix} \quad .$$

Nel primo caso, sviluppando il determinante lungo la prima riga otteniamo l'equazione

$$38 - 35 - 38 + 7k + 10k - 2k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2k^2 - 17k + 35 = 0$$

le cui soluzioni sono 5 e $\frac{7}{2}$. Passando al secondo orlo otteniamo l'equazione

$$(19k + 19 - 119) - 5(38 - 35) + k(34 - 5k - 5) = 0 \ \Leftrightarrow \ 5k^2 - 48k + 115 = 0$$

con soluzioni uguali a 5 e $\frac{23}{5}$.

Ora l'utilizzo dei dati deve essere fatto con attenzione: soltanto per $k = 5$ i due minori valgono zero simultaneamente, quindi 5 è l'unico valore che soddisfa la richiesta iniziale.

Esercizio D.

Al variare di $k \in \mathbf{R}$, studiare la risolubilità del seguente sistema, in particolare specificando il numero di parametri nei casi in cui esistono soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = k \\ 2x + 4y + (k+1)z = 7 \\ kx + 10y + 17z = 19 \end{cases} \quad .$$

Sol. La matrice completa è quella dell'Esercizio C! Invece, la matrice incompleta in effetti era sfuggita alla nostra analisi nel precedente esercizio. Il suo determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & k+1 \\ k & 10 & 17 \end{vmatrix} = k^2 - 14k + 45$$

e non era stato necessario calcolarlo, visto che stavamo avvalendoci del teorema degli orlati (attenzione, nella lezione del 22 ottobre ho confuso le due equazioni riportando questo polinomio alla lavagna, anziché $5k^2-48k+115$). Ora invece tale determinante acquista un ruolo cruciale al fine della discussione del sistema mediante il confronto tra i ranghi della matrice incompleta e completa. L'equazione $k^2 - 14k + 45 = 0$ è soddisfatta intanto da $k = 5$ (non ci deve sorprendere, lo sapevamo già dal precedente esercizio...) e poi abbiamo un ulteriore valore, $k = 9$. Per questo valore di k il rango della matrice incompleta vale 2 mentre il rango della completa resta 3, quindi il sistema non ammette soluzione. Invece, per $k = 5$ i ranghi dell'incompleta e della completa coincidono e valgono 2, quindi abbiamo risolubilità con un parametro (in simboli, ∞^1 soluzioni, in dettaglio ∞^{3-2}). Infine, per tutti gli altri valori di k abbiamo entrambi i ranghi uguali a 3, con conseguente risolubilità ma senza parametri (∞^0 soluzioni, oppure possiamo scrivere $\exists!$ soluzione).