Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

PARTE 1. *Quesiti – rispondere soltanto su questo foglio* – **TOTALE: 10.**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

⊙ Una matrice diagonale 5×5 ammette 5 autovettori distinti. [V]

⊙ Esistono matrici triangolari 4×4 che non sono invertibili. [V]

⊙ Due sottospazi di dimensione 4 in $\mathbf{R}^9$ possono avere un'intersezione di dimensione 3. [V]

⊙ Una base è definibile come un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. [F]

–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–

⊙ Determinare a in modo che il piano $\pi : x + ay + 3z - 4 = 0$ sia parallelo al vettore $(1, 1, 0)$. [-1]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(1, 4)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [$\frac{1}{3}$]

⊙ Calcolare la dimensione dell'immagine di un'applicazione iniettiva $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^8$. [6]

⊙ Determinare β in modo che la retta $r : \beta x - y = y - \beta z = 0$ sia perpendicolare al piano $\pi : x + 7y + z + 5 = 0$. [7]

PARTE 2.

Giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 20. I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : 2x - y + z = x - 3y + 1 = 0$, $s : x + 2y + z = 5x - 5y + 2z - 4 = 0$.

2.5 Dimostrare che esse sono parallele.

3 Calcolare la distanza tra r e il punto $P = (0, 0, 1)$ (conta molto il procedimento e secondariamente la correttezza dei calcoli).

Sol. I ranghi della matrice incompleta e completa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 5 & -5 & 2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

sono uguali a 2 e 3 rispettivamente (ad es. possiamo ridurre a gradini), quindi le rette risultano parallele.

Per calcolare la distanza costruiamo intanto il piano perpendicolare alla retta r e passante per P: dopo aver estratto un vettore direttore, ad es. $(3, 1, -5)$, predisponiamo un piano di equazione $3x + y - 5z + d = 0$ e poi imponendo il passaggio per P otteniamo $d = 5$. Ora troviamo il punto d'intersezione con r:

$$x = 3y - 1 \Rightarrow z = y - 2x = 2 - 5y \Rightarrow 3(3y - 1) + y - 5(2 - 5y) + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{35}, \; x = -\frac{11}{35}, \; z = \frac{6}{7}.$$

Infine calcoliamo la distanza tra i due punti:

$$\delta = \sqrt{\left(-\frac{11}{35}\right)^2 + \left(\frac{8}{35}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{35}\sqrt{11^2 + 8^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{210}}{35} = \sqrt{\frac{6}{35}}.$$

Ecco un modo alternativo (con strumenti analitici): troviamo il punto mobile $(3t-1, t, 2-5t)$ su r e poi minimizziamo la distanza da P (il suo quadrato, meglio) mediante l'annullamento della derivata di $9t^2+1-6t+t^2+1+25t^2-10t$, ottenendo $t=\frac{8}{35}$. Sostituendo, otteniamo

$$\delta = \sqrt{\frac{64}{35} - \frac{128}{35} + 2} = \sqrt{\frac{6}{35}} \ .$$

Esercizio 2.

$\boxed{3}$ Determinare una base di 3 autovettori relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (3x, 7x+4y, 7x+y+3z)$.

$\boxed{2}$ Stabilire se esistono vettori del codominio che hanno più di una controimmagine secondo f.

Sol. Imponendo

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 4-\lambda & 0 \\ 7 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

otteniamo un'equazione di terzo grado molto semplice:

$$(3-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \ .$$

Per $\lambda = 3$ abbiamo molteplicità geometrica 2; due generatori del relativo autospazio sono ad es. $(1,-7,0)$ e $(0,0,1)$; per $\lambda = 4$ troviamo l'autovettore $(0,1,1)$.

L'iniettività (dovuta al rango uguale alla dimensione del dominio) comporta una risposta negativa alla domanda finale.

Esercizio 3.

$\boxed{3}$ Esibire un'idonea rotazione e trasformare l'equazione $x^2+8xy+y^2-30=0$ nella forma canonica di un'iperbole.

$\boxed{1}$ Calcolare l'eccentricità di questa iperbole.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda = 5$, $(-1,1)$ per $\lambda = -3$. Sostituendo le nuove variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $5X^2 - 3Y^2 - 30 = 0$ o meglio, in forma canonica,

$$\frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{10} = 1 \ .$$

Per trovare l'eccentricità utilizziamo la formula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6+10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \ .$$

Esercizio 4.

$\boxed{2.5}$ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che il sistema $4x-ky+w = x+y+w+z = 5x+3y+2w+z = 0$ descriva un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^4$.

$\boxed{3}$ Posto $k=0$ in tale sistema, calcolare la proiezione ortogonale di $(1,1,0,0)$ rispetto al relativo sottospazio delle soluzioni.

Sol. Dobbiamo imporre che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

scenda a 2, in modo da far salire la dimensione a $4-2$ come richiesto. Orlando la sottomatrice in alto a sinistra otteniamo

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ 0=0 \ \wedge \ k+2=0 \ \Rightarrow \ k=-2 \ .$$

Per $k = 0$ invece la dimensione vale 1, quindi occorre trovare semplicemente un generatore; rispetto a tale vettore proietteremo il vettore dato. Una soluzione parametrica del sistema è

$$x = t \ , \ y = 0 \ \ w = -4t \ , \ z = 3t \ .$$

La proiezione è pertanto

$$\frac{(1,1,0,0) \times (1,0,-4,3)}{(1,0,-4,3) \times (1,0,-4,3)}(1,0,-4,3) = \frac{1}{26}(1,0,-4,3) \ .$$