⊙ L'inversa della matrice inversa di M è uguale a M. [V]

⊙ Uno spazio vettoriale generato da 4 vettori ha dimensione minore o uguale a 4. [V]

⊙ Il determinante di una matrice triangolare superiore non è mai nullo. [F]

⊙ In una data matrice, il numero di pivot varia al variare delle riduzioni a gradini. [F]

⊙⊙ Calcolare il termine nel posto $(1,2)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. $[-\frac{1}{21}]$

⊙⊙ Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x = -8$ e $\bar{\pi} : x + y + z = 9$. $[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

⊙⊙ Calcolare la distanza tra le rette $r : x = y$ e $\bar{r} : x = y + 5$ in un riferimento Oxy. $[\frac{5}{\sqrt{2}}]$

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio costituito dalle matrici 5×2 la cui somma dei 10 termini vale 0. [9]

....

⊙ Il determinante del prodotto di matrici quadrate $M \times M$ può valere -1. [F]

⊙ Uno spazio vettoriale generato da 4 vettori ha dimensione uguale a 4. [F]

⊙ Il determinante di una matrice diagonale può essere nullo. [V]

⊙ In una data matrice, il numero di pivot non varia al variare delle riduzioni a gradini. [V]

⊙⊙ Calcolare il termine nel posto $(2,1)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$. $[-\frac{1}{23}]$

⊙⊙ Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x + y = -8$ e $\bar{\pi} : x + y + z = 9$. $[\frac{2}{\sqrt{6}}]$

⊙⊙ Calcolare la distanza tra le rette $r : x - y = 0$ e $\bar{r} : x = y + 3$ in un riferimento Oxy. $[\frac{3}{\sqrt{2}}]$

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio costituito dalle matrici 3×4 la cui somma dei 12 termini vale 0. [11]

....

⊙ La trasposta di una matrice quadrata ha lo stesso determinante. [V]

⊙ Il vettore nullo può far parte di un insieme di generatori di un sottospazio. [V]

⊙ Il determinante di una matrice diagonale non è mai nullo. [F]

⊙ In una data matrice, il numero finale di pivot dipende dalle operazioni elementari effettuate. [F]

⊙⊙ Calcolare il termine nel posto $(1,2)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. $[-\frac{1}{24}]$

⊙⊙ Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x + y - z = -8$ e $\bar{\pi} : x + y + z = 9$. $[\frac{1}{3}]$

⊙⊙ Calcolare la distanza tra le rette $r : x = y$ e $\bar{r} : x = y + 4$ in un riferimento Oxy. $[\frac{4}{\sqrt{2}}]$

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio costituito dalle matrici 4×4 la cui somma dei termini sulla diagonale principale vale 0. [15]

....

⊙ L'inversa della matrice identità I_n è la trasposta di I_n. [V]

⊙ Dividendo per 2 tutti i vettori di una base otteniamo una nuova base. [V]

⊙ Il determinante di una matrice triangolare superiore può essere nullo. [V]

⊙ In una data matrice, il numero finale di pivot non dipende dalle operazioni elementari effettuate. [V]

$\odot\odot$ Calcolare il termine nel posto $(2,1)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. $[-\frac{1}{6}]$

$\odot\odot$ Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani $\pi : x + y = -8$ e $\bar{\pi} : y + z = 9$. $[\frac{1}{2}]$

$\odot\odot$ Calcolare la distanza tra le rette $r : x = y$ e $\bar{r} : x - y = 6$ in un riferimento Oxy. $[\frac{6}{\sqrt{2}}]$

$\odot\odot$ Calcolare la dimensione dello spazio costituito dalle matrici 4×4 che hanno tutti zeri nei "posti positivi della scacchiera". [8]

Esercizio 1.

[2 p.] In un riferimento $Oxyz$, stabilire se i punti $A = (1,1,1)$, $B = (2,1,-2)$, $C = (0,0,4)$, $D = (2,2,-2)$ sono complanari.

Sol. Esaminiamo ad esempio i tre vettori $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, calcolando il reativo determinante. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

quindi i quattro punti giacciono in un piano comune (in realtà A, C, D sono perfino allineati).

[1.5 p.] Stabilire se il triangolo BCD è rettangolo.

Sol. Considerando i vettori $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, notiamo che nessuno dei tre prodotti scalari è nullo, quindi non abbiamo un triangolo rettangolo. In dettaglio, $(-2,-1,6) \times (0,1,0) = -1$, $(-2,-1,6) \times (2,2,-6) = -42$, $(0,1,0) \times (2,2,-6) = 2$.

[3.5 p.] Scrivere equazioni cartesiane della retta che contenga il punto A e incontri in modo ortogonale la retta passante per B e C.

Sol. Realizziamo la retta come intersezione del piano contenente i tre punti col piano passante per A e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{CB}$. Un'equazione del primo piano è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ x & y & z-4 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ 3x + z - 4 = 0 \ ,$$

mentre il secondo piano è descritto da un'equazione della forma $2x+y-6z+d=0$; il valore di d segue dal passaggio per A, quindi otteniamo $2x + y - 6z + 3 = 0$. Le due equazioni definiscono, insieme, la retta richiesta.

Esercizio 2.

[3.5 p.] Al variare di $k \in \mathbf{R}$ discutere l'esistenza di soluzioni e il numero di parametri (∞^c) per il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3k^2 z = k + 4 \end{cases}$.

Sol. La terza riga della matrice incompleta è proporzionale alle altre due righe esattamente per $k = \pm 1$. In questi due casi il rango scende a 1, mentre per gli altri valori il rango vale 2 ed è uguale al rango della matrice completa (una equazione è infatti eliminabile sin dall'inizio, quindi in nessun caso il rango vale 3, per entrambe le matrici); per tutti i valori diversi da ± 1 abbiamo così soluzioni parametriche, ∞^1. Restano da analizzare i due casi particolari. Se $k = 1$ la terza equazione non segue la proporzionalità, quindi non esistono soluzioni (ranghi diversi). Invece se $k = -1$ anche la completa ha rango 1, quindi troviamo ∞^2 soluzioni.

Esercizio 3.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (x + y + 2z, x + y + 2z, x + y + 2z)$

Sol. L'equazione caratteristica è $-\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$. Per $\lambda = 0$ otteniamo un autospazio di dimensione 2, il nucleo stesso. Una base è ad esempio $\{(2,0,-1),(0,2,-1)\}$. Dal restante autovalore, $\lambda = 4$, risolvendo il relativo sistema otteniamo il terzo autovettore, $(1,1,1)$ ad esempio.

[1.5 p.] Scrivere la matrice di f rispetto alla base di autovettori trovata.

Sol.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

[2 p.] Calcolare (in forma parametrica) tutte le controimmagini del vettore $(5, 5, 5)$.

Sol. Il relativo sistema consiste di tre equazioni uguali, quindi restiamo con una sola equazione, $x + y + 2z = 5$ e possiamo considerare la soluzione $(5 - s - 2t, s, t)$ con s e t reali.

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 10xy + 25y^2 - (2\sqrt{26})x = 0$.

Sol. Autovettori: $(1, 5)$ per $\lambda = 26$, $(-5, 1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $26X^2 + 0Y^2 - 2\sqrt{26}\frac{1}{\sqrt{26}}(X - 5Y) = 0$, dunque $Y = -\frac{13}{5}X^2 + \frac{1}{5}X$.

[2 p.] Determinare le coordinate originali (nel vecchio riferimento) del fuoco.

Sol. Sostituendo le nuove coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{26} \\ -\frac{6}{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{26}} \\ \frac{1}{10\sqrt{26}} \end{pmatrix} .$$

....

Esercizio 1.

[2 p.] In un riferimento $Oxyz$, stabilire se i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, -2)$, $C = (0, 0, 4)$, $D = (2, 2, -2)$ sono complanari.

Sol. Esaminiamo ad esempio i tre vettori $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, calcolando il reativo determinante. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 ,$$

quindi i quattro punti giacciono in un piano comune (in realtà A, C, D sono perfino allineati).

[1.5 p.] Stabilire se il triangolo BCD è rettangolo.

Sol. Considerando i vettori $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, notiamo che nessuno dei tre prodotti scalari è nullo, quindi non abbiamo un triangolo rettangolo. In dettaglio, $(-1, -2, 6) \times (1, 0, 0) = -1$, $(-1, -2, 6) \times (2, 2, -6) = -42$, $(1, 0, 0) \times (2, 2, -6) = 2$.

[3.5 p.] Scrivere equazioni cartesiane della retta che contenga il punto D e incontri in modo ortogonale la retta passante per B e C.

Sol. Realizziamo la retta come intersezione del piano contenente i tre punti col piano passante per D e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{CB}$. Un'equazione del primo piano è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \\ x & y & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y + z - 4 = 0 ,$$

mentre il secondo piano è descritto da un'equazione della forma $x + 2y - 6z + d = 0$; il valore di d segue dal passaggio per D, quindi otteniamo $x + 2y - 6z - 18 = 0$. Le due equazioni definiscono, insieme, la retta richiesta.

Esercizio 2.

[3.5 p.] Al variare di $k \in \mathbf{R}$ discutere l'esistenza di soluzioni e il numero di parametri (∞^c) per il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3k^2y + 3z = k + 2 \end{cases}$.

Sol. La terza riga della matrice incompleta è proporzionale alle altre due righe esattamente per $k = \pm 1$. In questi due casi il rango scende a 1, mentre per gli altri valori il rango vale 2 ed è uguale al rango della matrice completa (una equazione è infatti eliminabile sin dall'inizio, quindi in nessun caso il rango vale 3, per entrambe le matrici); per tutti i valori diversi da ± 1 abbiamo così soluzioni parametriche, ∞^1. Restano da analizzare i due casi particolari. Se $k = -1$ la terza equazione non segue la proporzionalità, quindi non esistono soluzioni (ranghi diversi). Invece se $k = 1$ anche la completa ha rango 1, quindi troviamo ∞^2 soluzioni.

Esercizio 3.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (x + 3y + z, x + 3y + z, x + 3y + z)$

Sol. L'equazione caratteristica è $-\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0$. Per $\lambda = 0$ otteniamo un autospazio di dimensione 2, il nucleo stesso. Una base è ad esempio $\{(1, 0, -1), (0, 1, -3)\}$. Dal restante autovalore, $\lambda = 5$, risolvendo il relativo sistema otteniamo il terzo autovettore, $(1, 1, 1)$ ad esempio.

[1.5 p.] Scrivere la matrice di f rispetto alla base di autovettori trovata.

Sol.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

[2 p.] Calcolare (in forma parametrica) tutte le controimmagini del vettore $(4, 4, 4)$.

Sol. Il relativo sistema consiste di tre equazioni uguali, quindi restiamo con una sola equazione, $x + 3y + z = 4$ e possiamo considerare la soluzione $(4 - 3s - t, s, t)$ con s e t reali.

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $25x^2 + 10xy + y^2 - (2\sqrt{26})y = 0$.

Sol. Autovettori: $(5, 1)$ per $\lambda = 26$, $(-1, 5)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $26X^2 + 0Y^2 - 2\sqrt{26}\frac{1}{\sqrt{26}}(X + 5Y) = 0$, dunque $Y = \frac{13}{5}X^2 - \frac{1}{5}X$.

[2 p.] Determinare le coordinate originali (nel vecchio riferimento) del vertice.

Sol. Sostituendo le nuove coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{26} \\ -\frac{1}{260} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{52\sqrt{26}} \\ \frac{49}{260\sqrt{26}} \end{pmatrix}.$$