Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

PARTE 1. *Quesiti. SCRIVERE NEGLI SPAZI* [ ] *SENZA GIUSTIFICARE* – **TOTALE: 10.**

Errore $\Rightarrow -1$. Nessuna risposta $\Rightarrow 0$. $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti V/F e numerici corretti.

$\diamondsuit$ Scambiando due righe in una matrice quadrata, il determinante può restare invariato. [V]

$\diamondsuit$ I versori 2-dimensionali costituiscono un sottospazio dei vettori 2-dimensionali. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli dà il vettore nullo. [V]

$\diamondsuit$ Una base è un insieme minimale di generatori. [V]

$\triangledown$ Determinare a in modo che la matrice $\begin{pmatrix} a & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ abbia l'autovettore $(1, 2)$. [$\frac{6}{5}$]

$\triangledown$ Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{9}$. [$\frac{1}{3}$]

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra l'asse y e la retta passante per $(1, 1, 1)$, $(1, 6, 1)$. [$\sqrt{2}$]

$\triangledown$ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche 4×4. [10]

....

$\diamondsuit$ Scambiando due colonne in una matrice, il rango può cambiare. [F]

$\diamondsuit$ I versori 2-dimensionali non costituiscono un sottospazio dei vettori 2-dimensionali. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due vettori ortogonali dà il vettore nullo. [F]

$\diamondsuit$ Una base è un insieme massimale di generatori. [F]

$\triangledown$ Determinare a in modo che la matrice $\begin{pmatrix} a & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$ abbia l'autovettore $(1, 2)$. [$\frac{8}{5}$]

$\triangledown$ Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{5}$. [$\frac{1}{2}$]

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra l'asse y e la retta passante per $(1, 1, 2)$, $(1, 6, 2)$. [$\sqrt{5}$]

$\triangledown$ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale formato dalle matrici simmetriche 5×5. [15]

....

$\diamondsuit$ Moltiplicando per 2 tutte le righe in una matrice quadrata 4×4, il determinante raddoppia. [F]

$\diamondsuit$ I vettori 2-dimensionali con componenti non negative costituiscono un sottospazio dei vettori 2-dimensionali. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due versori ha lunghezza minore di 2. [V]

$\diamondsuit$ Una base è un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. [F]

$\triangledown$ Determinare a in modo che la matrice $\begin{pmatrix} a & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ abbia l'autovettore $(2,1)$. [-6]

$\triangledown$ Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. [$\frac{64}{3}$]

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra l'asse y e la retta passante per $(3,0,1)$, $(3,6,1)$. [$\sqrt{10}$]

$\triangledown$ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale formato dalle matrici diagonali 6×6. [6]

....

PARTE 2.

Qui invece giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 22. I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1. $\boxed{3}$ Determinare una base di autovettori per la funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (2x+7y, 4x+5y, 9z)$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Calcolare la controimmagine di $(0,2,1)$ utilizzando la matrice inversa di f (rispetto alle basi canoniche).

Sol.

$$0 = |M - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 18) \ \Rightarrow \ \lambda \in \{-2, 9\}\ .$$

Per $\lambda = 9$ otteniamo il sistema omogeneo di rango 1

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e troviamo quindi ∞^2 soluzioni, precisamente del tipo (s,s,t). Possiamo prelevare due vettori qualunque, purché non proporzionali, ad esempio $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$. Il secondo autovalore porta invece a un sistema di rango 2, con un solo autovettore a meno di fattori, ad esempio $(7,-4,0)$.

La matrice inversa M^{-1} può essere calcolata col metodo dei complementi algebrici ed è

$$\frac{1}{-162} \begin{pmatrix} 45 & -63 & 0 \\ -36 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & 0 \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\ .$$

Ora,

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & 0 \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}\ .$$

Esercizio 2. In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : \begin{cases} 4x - y = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - z - 1 = 0 \end{cases}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dimostrare che le due rette sono incidenti.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Scrivere un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare il coseno dell'angolo acuto che esse formano.

Sol. Risolviamo il sistema complessivo: $y = 4x$, quindi $z = -1 - y = -1 - 4x$; ora, da s otteniamo $z = 3x - 1$ da cui segue $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$. Effettivamente il punto $(0,0,-1)$ soddisfa anche la restante equazione, la prima di s.

Fascio di piani contenenti s: $\lambda(x-y+2z+2)+\mu(3x-z-1)=0$. Punto a piacere su r, purché diverso dall'intersezione: ad es. con $x=1$ troviamo $(1,4,-5)$. Imponendo il passaggio nell'equazione del fascio otteniamo $-11\lambda+7\mu=0$. Ponendo $\mu=11$ troviamo $\lambda=7$, quindi arriviamo all'equazione del piano: $40x-7y+3z+3=0$.

Una soluzione del sistema omogeneo relativo a r è $\vec{v}_r=(1,4,-4)$. Analogamente, con la giacitura di s otteniamo ad es. $\vec{v}_s=(1,7,3)$. Infine,

$$\mathit{coseno} = \frac{|(1,4,-4)\times(1,7,3)|}{\sqrt{33}\sqrt{59}} = \frac{17}{\sqrt{33}\sqrt{59}}\ .$$

Esercizio 3. $\boxed{2}$ In $\mathbf{R}^4$ calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ sul sottospazio $\langle(1,2,1,3),(1,0,0,0)\rangle$.

Sol. Un'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt al primo livello consente di sostituire $(1,2,1,3)$ con

$$(1,2,1,3)-\frac{(1,2,1,3)\times(1,0,0,0)}{(1,0,0,0)\times(1,0,0,0)}(1,0,0,0)=(0,2,1,3)\ .$$

Ora proiettiamo $(0,0,0,1)$ ottenendo

$$\mathit{proiezione} = \frac{3}{14}(0,2,1,3)+\frac{0}{1}(1,0,0,0)=\left(0,\frac{3}{7},\frac{3}{14},\frac{9}{14}\right)\ .$$

Esercizio 4. $\boxed{3}$ Eseguendo una rotazione del riferimento (esibire la relativa legge del cambiamento di coordinate) portare in una forma canonica la parabola definita dall'equazione $2x^2+2xy\sqrt{6}+3y^2+x\sqrt{15}=0$.

$\boxed{2}$ Calcolare le coordinate del vertice, nel riferimento iniziale Oxy.

Sol. Come autovettori di $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$ possiamo considerare $(\sqrt{6},3)$ per $\lambda=5$, $(-3,\sqrt{6})$ per $\lambda=0$. Una possibile rotazione è data dalle formule

$$x=\frac{1}{\sqrt{15}}(X\sqrt{6}-3Y)\quad,\quad y=\frac{1}{\sqrt{15}}(3X+Y\sqrt{6})\ .$$

Essa conduce alla forma canonica mediante il calcolo

$$5X^2+0Y^2+\sqrt{15}\frac{1}{\sqrt{15}}(X\sqrt{6}-3Y)=0\ \Rightarrow\ Y=\frac{5}{3}X^2+\frac{\sqrt{6}}{3}X.$$

Nelle nuove coordinate il vertice è uguale a

$$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{10},-\frac{1}{10}\right)\ .$$

Ora utilizziamo la legge del cambiamento di coordinate ottenendo

$$x_V=\frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\right)=-\frac{3}{10\sqrt{15}}\quad,\quad y_V=\frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{3\sqrt{6}}{10}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{15}}\ .$$

Esercizio 5. $\boxed{\mathbf{2.5}}$ Calcolare l'immagine di $(3,2)$ rispetto alla funzione $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^4$, lineare, essendo noto che $h(1,1)=(0,0,0,1)$ e $h(5,4)=(1,2,3,4)$.

Sol. Utilizziamo il metodo delle matrici componibili tenendo presente che vogliamo cambiare le coordinate nel dominio, così da accettare un input canonico:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

In sintesi, $h(3,2)=(1,2,3,2)$.