

Nome: Cognome:

Matricola: Firma:

PARTE 1. Quesiti. SCRIVERE NEGLI SPAZI [] SENZA GIUSTIFICARE – TOTALE: 10.

Errore $\Rightarrow -1$. Nessuna risposta $\Rightarrow 0$. $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti V/F e numerici corretti.

◇ Eliminando un vettore da 4 vettori linearmente dipendenti, permane la dipendenza lineare. [F]

◇ Esistono ellissi con i fuochi coincidenti. [V]

◇ Esistono applicazioni lineari che portano lo zero in un vettore non nullo. [F]

◇ I coefficienti di Fourier sono numeri non negativi. [F]

▽ Calcolare l'area del triangolo con vertici $(1, \sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, -1, 0)$ e l'origine. [$\frac{3}{2}$]

▽ Calcolare il numero nel posto $(3, 2)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. [-1]

▽ Calcolare la massima dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}$. [1]

▽ Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. [2]

.....

◇ Eliminando un vettore da 4 vettori linearmente indipendenti, permane l'indipendenza lineare. [V]

◇ Esistono coniche con eccentricità negativa. [F]

◇ Non esistono applicazioni lineari che portino lo zero in un vettore non nullo. [V]

◇ I coefficienti di Fourier sono quozienti di prodotti vettoriali. [F]

▽ Calcolare l'area del triangolo con vertici $(1, \sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, -1, 0)$ e l'origine. [2]

▽ Calcolare il numero nel posto $(2, 3)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. [$-\frac{4}{5}$]

▽ Calcolare la massima dimensione del nucleo di un'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}$. [7]

▽ Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -\sqrt{8} & \sqrt{8} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. [3]

.....

◇ Aggiungendo un vettore a 4 vettori linearmente dipendenti, permane la dipendenza lineare. [V]

◇ Esistono coppie di ellissi con esattamente 8 punti di intersezione. [F]

◇ Esistono applicazioni lineari che portano tutto il dominio nel solo vettore nullo. [V]

◇ I coefficienti di Fourier possono essere nulli. [V]

▽ Calcolare l'area del triangolo con vertici $(1, \sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, -1, 0)$ e l'origine. [3]

▽ Calcolare il numero nel posto $(1, 2)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. [$\frac{1}{5}$]

▽ Calcolare il massimo numero di autovalori per un'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^8 \rightarrow \mathbf{R}^8$. [8]

▽ Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & \pi & \pi & \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & \pi & 0 & \pi & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \pi & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi & \pi & \pi & 0 \end{pmatrix}$. [4]

.....

PARTE 2.

Qui invece giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 22. I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1. [2] Determinare due autovettori non proporzionali \underline{u} , \underline{v} per la funzione lineare $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (5x + 7y - z, 2y + z, 2z)$.

[2] Costruire un terzo vettore, \underline{w} , ortogonale ai due autovettori trovati.

[2] Stabilire se la matrice di f rispetto alla base $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ del dominio e del codominio è diagonale, fornendo più dettagli possibili sui numeri presenti in tale matrice.

Sol. Considerando la matrice di f rispetto alle basi canoniche, sia essa M , abbiamo:

$$0 = |M - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 7 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(5 - \lambda) \Rightarrow \lambda \in \{2, 5\}.$$

Per $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo di rango 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e troviamo quindi ∞^1 soluzioni, precisamente del tipo $(7s, -3s, 0)$. Possiamo prelevare ad esempio $(7, -3, 0)$. L'autovalore 5 porta, analogamente, a un autospazio di dimensione 1 generato ad es. da $(1, 0, 0)$ (attenzione al parametro, uguale alla prima incognita).

Otteniamo un vettore ortogonale mediante il prodotto vettoriale

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\mathbf{k} = (0, 0, 3)$$

se espresso in coordinate.

Il terzo vettore non è un autovettore, quindi il cambiamento di base non è una diagonalizzazione. Tuttavia le prime due colonne della nuova matrice sono parte di una matrice diagonale. Inoltre $f(0, 0, 3) = (-3, 3, 6)$ e le coordinate di questo vettore rispetto alla base $\{(7, -3, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 3)\}$ sono $-1, 4, 2$. La matrice è quindi uguale a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ottenerla in alternativa come

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (calcoli ecc.)}$$

Esercizio 2. **2.5** Dimostrare che qualunque punto della retta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ è equidistante dai piani $\pi : 3x - z + 2 = 0$ e $\pi' : y + 3z - 2 = 0$.

1.5 Come potrebbe essere spiegato geometricamente questo fenomeno? (in sintesi, senza calcoli)

2.5 Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato da r col piano π .

Sol. Il punto generico su r è del tipo $(t, -t, 1+t)$ (a seguito di una semplice risoluzione del sistema). Abbiamo ora

$$\frac{|3t - 1 - t + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|-t + 3 + 3t - 2|}{\sqrt{10}} \Rightarrow 0 = 0.$$

Ciò significa che qualunque t soddisfa la richiesta.

La retta giace nel piano che contiene l'intersezione dei due piani dati e — proprietà notevole — forma con essi due angoli uguali. È quindi il piano che biseca l'angolo tra i due piani dati. Tutti i suoi punti sono equidistanti dai due piani. In particolare — approfondimento non richiesto — esso incontra l'intersezione nel punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Il seno dell'angolo formato da r e π vale

$$\frac{|(1, -1, 1) \times (3, 0, -1)|}{\sqrt{3}\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{30}},$$

quindi il relativo coseno è uguale a $\sqrt{1 - \frac{4}{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}$.

Esercizio 3. **3** Eseguendo una rotazione del riferimento (esibire la relativa legge del cambiamento di coordinate) portare in una forma canonica l'iperbole definita dall'equazione $4xy - 5 = 0$.

Sol. Come autovettori di $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ possiamo considerare $(1, 1)$ per $\lambda = 2$, $(-1, 1)$ per $\lambda = -2$.

Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$. Essa conduce alla forma canonica mediante il calcolo

$$2X^2 - 2Y^2 = 5 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{5}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{5}{2}} = 1.$$

Esercizio 4. **2.5** Determinare una base ortogonale del sottospazio di $\mathbf{R}^4 \langle (1, 2, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$.

Sol. I tre vettori risultano linearmente indipendenti ad esempio perché il rango della matrice che li contiene come righe ammette un minore 3×3 non nullo, facilmente individuabile. Ora procediamo con un'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt in due fasi. Primo livello: scegliamo ad esempio i primi due vettori e modifichiamo il primo fissando il secondo come vettore già idoneo. Otteniamo

$$(1, 2, 1, 2) - \frac{(1, 2, 1, 2) \times (1, 0, 0, 0)}{(1, 0, 0, 0) \times (1, 0, 0, 0)}(1, 0, 0, 0) = (0, 2, 1, 2).$$

Ora passiamo al secondo livello modificando il terzo vettore; in dettaglio troviamo

$$(1, 1, 1, 1) - \frac{(1, 1, 1, 1) \times (1, 0, 0, 0)}{(1, 0, 0, 0) \times (1, 0, 0, 0)}(1, 0, 0, 0) - \frac{(1, 1, 1, 1) \times (0, 2, 1, 2)}{(0, 2, 1, 2) \times (0, 2, 1, 2)}(0, 2, 1, 2) = \left(0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{1}{9}\right).$$

Aggiustando il terzo vettore — anche se non è necessario — arriviamo alla base ortogonale

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 2), (0, 1, -4, -1)\}.$$

Esercizio 5. **2** Stabilire se esistono valori reali di k tali che la funzione $\varphi : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (kx_1 + 2kx_4, 3kx_1 + 6kx_4)$ preveda controimmagini per ogni elemento del codominio.

2 Posto $k = 1$, determinare una base di $\text{Ker}(\varphi)$.

Sol. Consideriamo la matrice di φ rispetto alle basi canoniche,

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 2k \\ 3k & 0 & 0 & 6k \end{pmatrix},$$

Il suo rango non supera 1 in alcun caso, quindi la suriettività è compromessa per ogni valore di k (la dimensione del codominio è maggiore del rango).

Per $k = 1$ occorre risolvere il sistema ridotto a una sola equazione, $x_1 + 2x_4 = 0$, con soluzione generale $(-2r, s, t, r) \forall r, s, t \in \mathbf{R}$. Il metodo 1-0 conduce ora alla base

$$\{(-2, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\} .$$