PARTI 1.

♢ Il triplo di un autovettore è un autovettore. [V]

♢ Una matrice triangolare superiore 2×2 non può avere il determinante nullo. [F]

♢ Un sistema lineare con 4 incognite e 4 equazioni può avere ∞^3 soluzioni. [V]

♢ Le giaciture di due rette sghembe hanno un solo punto in comune. [V]

▽ Determinare $a > 0$ in modo che il vettore $(2, a, 1)$ formi un angolo di $60°$ con l'asse x. [$\sqrt{11}$]
$\frac{2}{\sqrt{4+a^2+1}\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16 = 5 + a^2$ ecc.

▽ Calcolare il numero nel posto $(4, 1)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [$\frac{1}{5}$]

▽ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^6$. [1]

▽ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale formato dai vettori tridimensionali ortogonali all'asse x. [2]

....

♢ Le matrici diagonali 3×3 sono invertibili. [F]

♢ Un sistema lineare con 3 incognite e 4 equazioni può avere ∞^0 soluzioni. [V]

♢ Le giaciture di due rette parallele coincidono. [V]

♢ L'opposto di un autovettore è un autovettore. [V]

▽ Determinare $a > 0$ in modo che il vettore $(2, a, 3)$ formi un angolo di $60°$ con l'asse z. [$\sqrt{23}$]
$\frac{3}{\sqrt{4+a^2+9}\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 36 = 13 + a^2$ ecc.

▽ Calcolare il numero nel posto $(4, 1)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. [$\frac{2}{3}$]

▽ Calcolare la dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^6$. [2]

▽ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale formato dai vettori tridimensionali ortogonali al piano xy. [1]

PARTE 2.

Esercizio 1. Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalle immagini $f(1, 0, 0) = (4, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (5, 4, 0)$, $f(0, 0, 1) = (2, -3, 4)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Trovare un autovettore di f.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Spiegare, in termini di molteplicità, perché non è possibile rappresentare f mediante una matrice diagonale rispetto a una base idonea (sia nel dominio che nel codominio).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol.

$$0 = |M - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 \;\Rightarrow\; \lambda = 4 \,.$$

Risolvendo il sistema
$$\begin{pmatrix} 4-4 & 5 & 2 \\ 0 & 4-4 & -3 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
troviamo il relativo autospazio, $\langle (1,0,0) \rangle$.

La molteplicità algebrica dell'autovalore 4 è superiore a quella geometrica: $3 > 1$. Non è possibile, quindi, associare a $\lambda = 4$ tre autovettori linearmente indipendenti. La diagonalizzazione sarebbe possibile solo in quel caso, visto che non ci sono altri autovalori in grado di produrre autovettori mediante un sistema.

La funzione f è iniettiva perché il rango della matrice M è uguale alla dimensione del dominio, quindi non esistono coppie che soddisfano la richiesta.

Esercizio 2. Sia data la funzione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla legge $g(x,y,z) = (x+y, y+z, x+2y+z, 0)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Esibire una base del nucleo di g.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Esibire una base dell'immagine di g.

Sol. Imponendo che l'immagine sia il vettore nullo $(0,0,0,0)$ abbiamo $x = -y$, $z = -y$ e la terza equazione svanisce. Il nucleo ha dimensione 1 ed è generato ad esempio da $(1,-1,1)$. Necessariamente l'immagine di f avrà dimensione $3-1 = 2$. Le tre immagini dei vettori canonici sono rispettivamente $(1,0,1,0)$, $(1,1,2,0)$, $(0,1,1,0)$ e possiamo direttamente osservare che la seconda immagine è la somma delle altre due. Ad esempio queste ultime costituiscono una base dell'immagine di f.

Esercizio 3. $\boxed{\mathbf{3.5}}$ Determinare gli eventuali valori di k – parametro reale – che rendono insolubile il sistema
$$\begin{cases} 3x + 5y + z - 2 = 0 \\ 2x + y + kz + k = 0 \\ kx + 6y + 6z + 3 = 0 \end{cases} .$$

Sol. Abbiamo:
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ k & 6 & 6 \end{vmatrix} = 5k^2 - 19k - 30 .$$

Il rango della matrice incompleta scende a 2 per $k = 5$ e $k = -\frac{6}{5}$. Per gli altri valori di k la matrice incompleta ha lo stesso rango, 3, della completa, quindi esiste (un'unica) soluzione. Esaminiamo ora i due casi particolari. Grazie al teorema degli orlati è sufficiente calcolare il determinante
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & k & k \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} ,$$
tenendo presente che $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$ non è nullo. Tale determinante è uguale a $3k - 15$, quindi vale zero per $k = 5$ soltanto. Ne deduciamo che $k = -\frac{6}{5}$ è l'unico valore che provoca la disuguaglianza dei ranghi: esso è il numero richiesto.

Esercizio 4. $\boxed{\mathbf{3}}$ Eseguendo una rotazione del riferimento (esibire la relativa legge del cambiamento di coordinate) portare in forma canonica l'iperbole la cui equazione è $x^2 + 2\sqrt{2}xy - 10 = 0$.

Sol. Come autovettori di $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ possiamo considerare $(\sqrt{2}, 1)$ per $\lambda = 2$, $(-1, \sqrt{2})$ per $\lambda = -1$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{3}}(X\sqrt{2} - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y\sqrt{2})$. Essa conduce alla forma canonica mediante il calcolo
$$2X^2 - 1Y^2 = 10 \Rightarrow \frac{X^2}{5} - \frac{Y^2}{10} = 1 .$$

Esercizio 5. In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Dimostrare che r è parallela a s.
$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare la distanza tra r e s.

Sol. Effettuiamo una riduzione a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \| & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \| & -1 \\ 1 & 2 & 1 & \| & 0 \\ 2 & -5 & 5 & \| & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \underline{r}_1 \\ \underline{r}_4 \to \underline{r}_4 - 2\underline{r}_1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \| & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \| & -1 \\ 0 & 3 & -1 & \| & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \| & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \underline{r}_2 \\ \underline{r}_4 \to \underline{r}_4 + \underline{r}_2 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \| & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \| & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \| & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \| & -3 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_4 \to \underline{r}_4 + 3\underline{r}_3 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \| & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \| & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \| & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \| & 0 \end{pmatrix} .$$

Siamo quindi nel caso $2 < 3$ per quanto riguarda i ranghi. Questa è la condizione per il parallelismo.

Per calcolare la distanza intersechiamo le rette con un piano perpendicolare. Troviamo intanto un vettore direttore di r lavorando sul sistema omogeneo: $z = 3y$, quindi $x = y - 2z = -5y$ e infine arriviamo alle soluzioni $(-5y, y, 3y)$ tra cui scegliamo per comodità il vettore $(5, -1, -3)$. Risolviamo col metodo di Cramer il sistema tra r e il piano $\pi : 5x - y - 3z = 0$ (scegliamo il piano avente il termine noto nullo) ottenendo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-35} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-35} \ , \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-35} \ .$$

Similmente, intersecando il piano con la retta s otteniamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{20}{105} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{105} \ , \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{44}{105} \ .$$

Infine calcoliamo la distanza tra i due punti trovati:

$$distanza = \frac{1}{105}\sqrt{(20-15)^2 + (-32-39)^2 + (44-12)^2} = \frac{\sqrt{25 + 5041 + 1024}}{105} = \frac{\sqrt{6090}}{105} \ .$$

Come metodo alternativo (approfondimento sull'ortogonalità) creiamo un vettore con punti estremi sulle due rette e poi lo modifichiamo rispetto a $(5, -1, -3)$ mediante l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, calcolandone infine il modulo. Un punto di r ha ad esempio $y = 0$, quindi $z = -1$ e infine $x = y - 2z = 2$; in sintesi, $A = (2, 0, -1)$. Un punto di s ha ancora $y = 0$, quindi $x = -z$ e infine $3z = 4$ da cui otteniamo $z = \frac{4}{3} = -x$; in sintesi, $B = \left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$. La differenza di queste due terne dà luogo al vettore $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{10}{3}, 0, -\frac{7}{3}\right)$. Infine,

$$distanza = modulo\left(\left(\frac{10}{3}, 0, -\frac{7}{3}\right) - \frac{\left(\frac{10}{3}, 0, -\frac{7}{3}\right) \times (5, -1, -3)}{25 + 1 + 9}(5, -1, -3)\right) =$$

$$= \left\|\left(\frac{10}{3}, 0, -\frac{7}{3}\right) - \frac{71}{105}(5, -1, -3)\right\| = \frac{1}{105}\|(-5, 71, -32)\| = \frac{\sqrt{6090}}{105} \ .$$