Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

$\boxed{\textbf{Giustificare}}$ **le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

$\boxed{\textit{Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.}}$

Allegare il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **31**

1. [3 punti] Dimostrare che per nessun valore reale di k il vettore $(k, 0, k, 1)$ appartiene al sottospazio generato dai vettori $(2, 2, 1, k)$, $(1, 2, 4, 4)$.

[2.5 punti] Ponendo $k = 0$, determinare un vettore (non nullo) che sia ortogonale ai tre vettori dati.

Sol. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Non esistono valori di k con la proprietà richiesta. Infatti non esistono radici comuni per due minori orlati, fissando ad es. la sottomatrice di ordine 2 in basso al centro. Nel dettaglio, le radici delle equazioni $8k = 0$ e $k^2 - 4k + 3 = 0$ sono 0 nel primo caso, 1, e 3 nel secondo.

Il vettore richiesto deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} .$$

La soluzione costituisce un sottospazio di dimensione 1 in $\mathbf{R}^4$. Ad esempio il metodo (ℓ, m, n) per le prime tre incognite (la quarta vale zero) dà

$$x_1 = \ell = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad x_2 = m = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7 \quad , \quad x_3 = n = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 .$$

Le altre soluzioni sono multiple di questa appena trovata.

2. [3 punti] Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + 3y, 2x + 6y, z)$, determinarne una base di autovettori.

[2 punti] Esibire un vettore che non abbia controimmagine secondo f.

[1.5 punti] Calcolare la dimensione dell'immagine di f.

Sol. L'equazione caratteristica è

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda) = 0 .$$

Associamo ora gli autovalori ai rispettivi autovettori, a meno di un fattore; $\lambda = 0$: $(3, -1, 0)$; $\lambda = 1$: $(0, 0, 1)$; $\lambda = 7$: $(1, 2, 0)$. Il calcolo di ciascun autovettore consiste nella risoluzione del consueto sistema omogeneo associato all'autovalore.

Un vettore che non ha controimmagine deve avere le prime due componenti diverse da $(a, 2a)$.

La dimensione dell'immagine è uguale al rango, 2.

3. [3 punti] Scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente l'asse z e parallelo al segmento congiungente i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$.

[2 punti] Stabilire se l'asse z forma un angolo di $30°$ col vettore $(1, 1, 2)$.

[2.5 punti] Scrivere equazioni cartesiane di una retta (scelta a piacere) che sia parallela all'asse x e incidente all'asse z.

Sol. Ricordiamo che l'asse z può essere definito mediante le equazioni cartesiane $x = y = 0$; il piano richiesto è dunque del tipo $\lambda(x) + \mu(y) = 0$ e la sua giacitura dovrà contenere il vettore $(2, 0, -2)$. Da $2\lambda + 0\mu = 0$ otteniamo $\lambda = 0$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo l'equazione $y = 0$.

Un vettore direttore dell'asse z è $(0,0,1)$. Il coseno dell'angolo in questione vale

$$\frac{(0,0,1)\times(1,1,2)}{\sqrt{1}\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

perché $4^2 \neq \sqrt{18}^2$, quindi la risposta è negativa.

Una retta con la proprietà richiesta è intanto della forma $y=a \wedge z=b$ e poi deve intersecare l'asse z, quindi abbiamo $a=0$. Ad esempio la retta definita dalle equazioni $y=0\wedge z=91$ è idonea.

4. [3.5 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ rispetto al sottospazio $T=\langle(1,2,3,4), (4,3,2,1), (2,2,2,2), (3,4,5,6)\rangle$.

[2.5 punti] Esibire un vettore che non sia una combinazione lineare di vettori appartenenti a T.

[2.5 punti] È possibile che un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^4$ intersechi T soltanto nello zero?

Sol. La riduzione a gradini può essere un modo per dimostrare che T ha dimensione 2. In alternativa, non è difficile in questo esercizio mostrare direttamente che due dei quattro vettori sono generati dagli altri, linearmente indipendenti. Ora scegliamo, per comodità, il primo vettore e il terzo opportunamente modificato dividendolo per 2. Ortogonalizzando $(1,2,3,4)$ rispetto a $(1,1,1,1)$ otteniamo $(1,2,3,4)-\frac{10}{4}(1,1,1,1)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ che possiamo amplificare di 2 ottenendo $(-3,-1,1,3)$. Infine proiettando il vettore dato otteniamo $\underline{p}=\frac{1}{4}(1,1,1,1)-\frac{3}{20}(-3,-1,1,3)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{10},-\frac{1}{5}\right)$.

Un vettore che soddisfi la seconda richiesta può essere il vettore stesso $(1,0,0,0)$ perché la sua proiezione è diversa da tale vettore, quindi esso è esterno al sottospazio. In alternativa possiamo costruire una matrice che ha le prime due righe ad es. uguali a $(1,2,3,4)$ e $(1,1,1,1)$ e aggiungiamo una terza riga in modo da creare un minore di 3×3 non nullo. A tal fine basta considerare un vettore elementare come $(0,0,0,1)$.

La risposta all'ultima domanda è affermativa perché la formula di Grassmann assicura che l'intersezione di qualunque sottospazio bidimensionale con T ha dimensione $2+2-r$ con $r\leq 4$ (infatti la somma diretta è un sottospazio dello spazio ambiente $\mathbf{R}^4$). Effettivamente, se la somma diretta copre tutto $\mathbf{R}^4$ abbiamo soddisfatto la richiesta.

5. [3 punti] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $46x^2-60xy-17y^2-580=0$ in modo che i nuovi vertici giacciano sull'asse delle ascisse.

Sol. La matrice da diagonalizzare è $\begin{pmatrix} 46 & -30 \\ -30 & -17 \end{pmatrix}$. Dall'equazione caratteristica $\lambda^2-29\lambda-1682=0$ otteniamo gli autovalori -29 e 58, con rispettivi autospazi $\{(2t,5t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ e $\{(-5t,2t)\colon t\in\mathbf{R}\}$. Per ottenere un'iperbole con vertici sul nuovo asse X poniamo l'autovalore positivo davanti al futuro monomio X^2, quindi un cambiamento di coordinate idoneo (con determinante positivo, 1, controllare sempre) è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

A seguito del cambiamento di coordinate otteniamo la forma canonica

$$\frac{X^2}{10}-\frac{Y^2}{20}=1 .$$