Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.

Lasciare uno spazio di circa 5 cm all'inizio, con nome e cognome.

Inserire il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Giustificare le risposte. Punteggio totale: **30.5**

Lei aveva già consegnato una precedente prova scritta?

Eventualmente, in quale mese e anno? ....
(nel caso affermativo, previo controllo del docente, la soglia di ammissione viene leggermente abbassata)

Esercizio 1.

[3 p.] Dimostrare che non esiste alcun piano perpendicolare alla retta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 3 \end{cases}$ e passante per i punti $(1, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$.

[3 p.] Sostituendo a "perpendicolare" il termine "parallelo", dimostrare che ora il relativo piano esiste determinandone un'equazione cartesiana.

Sol. Un vettore direttore di r è soluzione del relativo sistema omogeneo, ad esempio $(1, -1, -1)$. Il vettore che ha i due punti come estremi è $(1, 3, 1)$ ma esso non è ortogonale a $(1, -1, -1)$ perché il prodotto scalare non è nullo (vale -3), quindi il vettore normale dell'ipotetico piano non sarebbe ortogonale a uno degli infiniti vettori paralleli al piano, assurdo.

Un'equazione idonea, nel secondo caso, è

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x-1 & y-0 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0 \ .$$

Nota: il punto $(1, 0, 0)$ non soddisfa le equazioni della retta, quindi il piano trovato è effettivamente parallelo (non contiene la retta).

Esercizio 2.

[2.5 p.] Al variare di $k \in \mathbf{R}$, il rango della matrice $\begin{pmatrix} k & 1 & 3k \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ non cambia. Dimostrare questa proprietà.

Sol. La terza colonna è proporzionale alla prima; le prime due colonne non sono proporzionali in alcun caso, ad esempio perché il minore di ordine 2 più in basso è diverso da zero per ogni valore di k. Il rango resta quindi invariabilmente uguale a 2.

Esercizio 3.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione lineare definita dalla legge $f(x, y, z) = (x + y + z, z, 2z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che non abbia controimmagine.

[2.5 p.] Determinare tre vettori aventi la medesima immagine.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1, 2\}.$$

Per $\lambda = 0$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 0 & 0-0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = 0 \, , \, \alpha = -\beta \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (t, -t, 0) \ .$$

Similmente, sostituendo gli altri due autovalori troviamo $(t,0,0)$ e $(3t,t,2t)$, comunque $\forall t \neq 0$; possiamo ora scegliere t arbitrariamente.

Un vettore-colonna che alzi il rango da 2 a 3 se aggiunto alla matrice incompleta è ad esempio $(0,0,1)$ perché esistono minori 3×3 non nulli nella matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ad esempio quello relativo alle colonne 2, 3 e 4.

Il nucleo è un bacino idoneo per la ricerca di tre vettori aventi la stessa immagine. Disponiamo già dei vettori che formano il nucleo perché essi coincidono con gli autovettori relativi all'autovalore 0. Selezioniamo liberamente ad esempio $(1,-1,0)$, $(2,-2,0)$ e possiamo aggiungere anche $(0,0,0)$ in questo contesto.

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica l'ellisse definita dall'equazione $8x^2+18xy+32y^2-70=0$.

[2 p.] Calcolare le coordinate dei due fuochi nel riferimento iniziale Oxy.

[1 p.] Calcolare l'eccentricità di questa conica.

Sol. Scrivendo l'equazione caratteristica e calcolandone le soluzioni abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 9 \\ 9 & 32-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-40\lambda^2+175=0 \;\Rightarrow\; \lambda = 20\pm 15 \;\Rightarrow \lambda \in \{5,35\}.$$

Autovettori: $(1,3)$ per $\lambda=35$, $(-3,1)$ per $\lambda=5$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo $35X^2+5Y^2-70=0$ e arriviamo alla forma canonica

$$\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{14}=1 \; .$$

Sostituendo le nuove coordinate dei fuochi nella legge trovata, otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{12} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 3\sqrt{\frac{6}{5}} \\ -\sqrt{\frac{6}{5}} \end{pmatrix} \; .$$

L'eccentricità vale $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$.

Esercizio 5.

[3 p.] Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(3,2,4,1)$ rispetto al sottospazio S di $\mathbf{R}^4$ definito dalla sola equazione $4x+y+z+t=0$ con $(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$.

Sol. Anziché calcolare una base ortogonale di S, procedura dispendiosa ancorché corretta, in questo contesto è molto più conveniente proiettare sul sottospazio ortogonale per poi semplicemente sottrarre il risultato. Il sottospazio $S^\perp$ è infatti generato dal singolo vettore $(4,1,1,1)$. Abbiamo quindi:

$$\underline{p} = (3,2,4,1) - \frac{(3,2,4,1)\times(4,1,1,1)}{(4,1,1,1)\times(4,1,1,1)}(4,1,1,1) = (3,2,4,1) - \frac{19}{19}(4,1,1,1) = (-1,1,3,0) \; .$$

Esercizio 6.

[2.5 p.] Di una matrice 3×3 A è noto che $|A|=8$. Calcolare il determinante del prodotto di matrici $A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \pi & \pi \\ 0 & -\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^4 \cdot A^{-1}$.

Sol. Applicando una proprietà riconducibile al teorema di Binet possiamo intanto dedurre che $|A^{-1}|$ è l'inverso di 8. Ora, tenendo presente il determinante uguale a 3 nel caso della matrice triangolare, sempre in virtù del teorema di Binet otteniamo:

$$\left| A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \pi & \pi \\ 0 & -\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^4 \cdot A^{-1} \right| = 8^2 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{8} = 8 \cdot 81 = 648 \ .$$

Esercizio 7.

[3 p.] Enunciare la formula di Grassmann nel caso di due piani vettoriali S, T coincidenti nello spazio, passanti per l'origine. In particolare, cosa rappresenta in questo caso il sottospazio "somma"?

Sol. L'intersezione di questi due sottospazi, ciascuno di dimensione 2, è in questo caso il piano stesso. La specializzazione della formula di Grassmann dà

$$din(S) + dim(T) = dim(S \cap T) + dim(S + T) \ \Rightarrow \ 2 + 2 = 2 + dim(S + T)$$

e infatti anche la somma di S e T ha dimensione 2 perché il sottospazio generato da due basi di sottospazi uguali resta lo stesso sottospazio.