Autovettori e diagonalizzazione.

(Supplemento al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

Sia A una matrice quadrata di ordine 3 e supponiamo che esistano tre vettori linearmente indipendenti $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ e tre numeri reali λ_1, λ_2, λ_3 tali che $A\underline{u}_i^t = \lambda_i \underline{u}_i^t \ \forall i$. Ciascun vettore $\underline{u}_i$ si dice *autovettore* di A con rispettivo *autovalore* λ_i. Facciamo un esperimento: costruiamo una matrice C mettendo in colonna i tre autovettori e consideriamo anche l'inversa C^{-1} (perché essa esiste con certezza?...).

Ora calcoliamo il prodotto

$$C^{-1} A\, C \ .$$

Intanto calcoliamo AC: otteniamo una matrice con le tre colonne uguali ai rispettivi autovettori moltiplicati per i propri autovalori. Utilizzando la definizione stessa di prodotto di matrici possiamo sinteticamente scrivere

$$A\, C = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \ .$$

Ora, moltiplicando a sinistra con C^{-1} è immediato notare che il risultato finale è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \ .$$

Abbiamo così dimostrato che una matrice dotata di una base di autovettori può essere “diagonalizzata” mediante un'opportuna matrice invertibile.