

Sapienza Università di Roma

Programma del modulo di Geometria analitica

(corso: Principi di analisi matematica, geometria e ottimizzazione; I semestre)

a.a. 2020-2021

docente: Andrea Vietri

Matrici. Definizione di matrice e relativa simbologia. Operazioni con matrici. Matrici particolari (simmetriche, diagonali, ecc.). Determinante (definito mediante il primo teorema di Laplace). Complementi algebrici. Teorema di Binet. Matrice inversa. Riduzione a scala (metodo di Gauss). Rango per pivot. Rango per minori. Teorema degli orlati.

Vettori, spazi vettoriali, sottospazi. Vettori, spazi vettoriali. Vettori numerici e spazi vettoriali $\mathbf{R}^n$. Operazioni con vettori. Esempi di spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Sottospazio generato da alcuni vettori. Intersezione di sottospazi.

Sistemi lineari. Matrice incompleta e matrice completa di un sistema lineare. Teorema di Cramer. Riduzione a scala per la soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli (**dim.** utilizzando il rango per pivot). Scelta dei parametri per le soluzioni. Simbolo ∞^p . Discussione di sistemi lineari con coefficienti parametrici.

Vettori geometrici. Vettori geometrici liberi e vettori applicati, nel piano e nello spazio. Rappresentazione di punti e di vettori geometrici. Vettore geometrico che ha come estremi due punti ordinati. Lunghezza di un vettore geometrico. Distanza tra punti. Versori e normalizzazione. Proiezione ortogonale (numerica) di un vettore sulla retta definita da un altro vettore. Prodotto scalare tra vettori geometrici e sua formula cartesiana. Parallelismo di due vettori, complanarità (nello spazio) di tre vettori. Angolo tra due vettori e calcolo del suo coseno.

Geometria del piano. Forma cartesiana (implicita ed esplicita), forma parametrica di una retta. Quota e coefficiente angolare. Eliminazione (assorbimento) del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Risoluzione di un sistema (di una sola equazione) per il processo inverso. Parallelismo, perpendicolarità tra rette. Giacitura (retta passante per l'origine e parallela alla retta data). Equazioni di rette con specifiche iniziali. Allineamento di punti. Vettore normale (o perpendicolare) a una retta. Distanza tra un punto e una retta. Interpretazione geometrica di un sistema lineare in due incognite, come intersezione di rette.

Geometria dello spazio. Forma cartesiana, forma parametrica di un piano. Piani paralleli. Mutue posizioni di due piani. Punti allineati, punti complanari. Vettori direttori di rette. Forma cartesiana e parametrica di una retta. Parallelismo di rette. Fasci propri e impropri di piani. Equazioni di rette o piani con specifiche iniziali. Giacitura (piano o retta passante per l'origine e parallelo al piano o alla retta data). Rette sghembe. Mutue posizioni di rette. Parallelismo tra retta e piano. Mutue posizioni di retta e piano. Vettore normale a un piano. Piani perpendicolari. Rette perpendicolari a un piano. Distanza tra un punto e un piano. Distanza tra un punto e una retta. Distanza tra rette parallele. Distanza minima tra rette sghembe. Interpretazione geometrica di sistemi lineari in tre incognite. Angolo tra due piani, tra due rette, tra un piano e una retta – calcolo del coseno.

Insiemi e funzioni (o applicazioni). Insiemi e (approfondimento) relazioni. Dominio, codominio, immagine, controimmagine. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di applicazioni. Invertibilità.

Applicazioni lineari. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generali. Applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Matrice associata ad una applicazione lineare, rispetto a una base del dominio e ad una del codominio. Iniettività, suriettività di un'applicazione lineare e loro relazione col rango della matrice associata. Descrizione geometrica di un'applicazione lineare, se le dimensioni del dominio e del codominio sono minori o uguali a 3.

Autovettori e diagonalizzazione. Autovettori e autovalori di un'applicazione lineare (endomorfismo) tra spazi vettoriali uguali. Diagonalizzazione mediante un opportuno cambiamento di base. Diagonalizzazione di applicazioni la cui matrice è simmetrica (teorema spettrale). Matrici ortogonali.

Coniche e cenni sulle quadriche. Coniche come sezioni di un cono a due falde. Definizione di una conica mediante i due fuochi (per ellisse e iperbole) e mediante fuoco e direttrice (anche per la parabola). Eccentricità. Forme canoniche di coniche ottenute a partire dalle definizioni geometriche e relative formule (esempio esplicito dell'ellisse). Rotazioni del riferimento e loro effetto sull'equazione di una conica. Equazione generica della sfera e analogia con la circonferenza.