Selezionare uno dei tre testi

- -

$\diamondsuit$ Il prodotto di due matrici non invertibili è una matrice non invertibile. [V]

$\diamondsuit$ In $\mathbf{R}^6$ è possibile che un vettore non sia generato da 6 altri vettori dati. [V]

$\diamondsuit$ Il rango per righe può superare di 1 il rango per colonne. [F]

$\diamondsuit$ Il determinante di una matrice 4×4 non varia se scambiamo due righe e due colonne. [V]

$\bigtriangledown$ Determinare il massimo numero di matrici 3×3 che siano tra loro linearmente indipendenti. [9]

$\bigtriangledown$ Determinare p, positivo, in modo che il piano $\pi : x - y + p = 0$ sia distante $4\sqrt{2}$ dall'origine. [8]

$\bigtriangledown$ Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 5 per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. [1]

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che il versore $\mathbf{i}$ formi un angolo di $60°$ con la retta $r : \begin{cases} y = 2 \\ hx - y - z = 0 \end{cases}$. [$\sqrt{3}$]

- -

$\diamondsuit$ Il prodotto di due matrici invertibili è una matrice invertibile. [V]

$\diamondsuit$ Se 5 vettori sono linearmente dipendenti, lo sono anche 4 qualunque di essi. [F]

$\diamondsuit$ Il numero di pivot può superare di uno il rango per righe. [F]

$\diamondsuit$ Il determinante di una matrice 5×5 non varia se lo calcoliamo sulla trasposta. [V]

$\bigtriangledown$ Determinare il massimo numero di matrici 2×3 che siano tra loro linearmente indipendenti. [6]

$\bigtriangledown$ Determinare p, positivo, in modo che il piano $\pi : x - 2z + p = 0$ sia distante $3\sqrt{5}$ dall'origine. [15]

$\bigtriangledown$ Determinare la molteplicità algebrica dell'autovalore 5 per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. [3]

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che il versore $\mathbf{k}$ formi un angolo di $45°$ con la retta $r : \begin{cases} x = 2 \\ x - y + hz = 0 \end{cases}$. [1]

- -

$\diamondsuit$ La somma di due matrici invertibili è una matrice invertibile. [F]

$\diamondsuit$ In $\mathbf{R}^4$ esistono 5 vettori che generano tutto lo spazio. [V]

$\diamondsuit$ Il numero di pivot dipende dalla riduzione a gradini effettuata. [F]

$\diamondsuit$ Il determinante di una matrice diagonale potrebbe essere nullo. [V]

$\bigtriangledown$ Determinare il massimo numero di matrici 4×2 che siano tra loro linearmente indipendenti. [8]

$\bigtriangledown$ Determinare p, positivo, in modo che il piano $\pi : 3x - y + p = 0$ sia distante $3\sqrt{10}$ dall'origine. [30]

$\bigtriangledown$ Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [2]

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che il versore $\mathbf{i}$ formi un angolo di $45°$ con la retta $r : \begin{cases} y = 2 \\ hx - y - z = 0 \end{cases}$. [1]

Selezionare uno dei due testi

- -

Esercizio 1.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (x + 3y + 5z, 3x + 9y + 15z, 5x + 15y + 25z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che sia ortogonale al nucleo di f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 3 & 9-\lambda & 15 \\ 5 & 15 & 25-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 35\lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \{0, 35\} \,.$$

L'autospazio relativo a $\lambda = 0$ è il nucleo, un piano generato da due qualunque vettori linearmente indipendenti che risolvano l'equazione $x + 3y + 5z = 0$ (ad es. $(5, 0, -1)$ e $(0, 5, -3)$). Il secondo autovalore conduce all'autospazio $\{(t, 3t, 5t)\} = \langle(1, 3, 5)\rangle$.

Il vettore $(a, b, c) = (1, 3, 5)$ è chiaramente ortogonale al piano $\pi : x + 3y + 5z = 0$ che è il nucleo (nota: sarebbe idoneo anche il vettore nullo; nel testo era quasi sottinteso ma giustamente, non essendo precisata l'esclusione, è corretta anche questa risposta).

Esercizio 2.

[1.5 p.] Dimostrare che l'asse y e la retta $r : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ 3x - 2y + 10 = 0 \end{cases}$ sono incidenti.

[3.5 p.] Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette date.

[1.5 p.] Aggiungendo alle due equazioni di r una terza equazione che sia la somma delle altre due, cosa rappresenta geometricamente questa terza equazione?

Sol. Il punto parametrico $(0, t, 0)$ deve soddisfare entrambe le equazioni di r, per un valore comune di t. Troviamo in effetti $t = 5$.

Il piano richiesto è del tipo $\lambda(x + y + 2z - 5) + \mu(3x - 2y + 10) = 0$ e deve passare ad esempio per l'origine. Questo vincolo porta alla condizione $\lambda = 2\mu$. Scegliendo $\mu = 1$ otteniamo $\lambda = 2$ e arriviamo infine all'equazione $5x + 4z = 0$.

La terza equazione rappresenta un piano contenente r, diverso dai due piani che la definiscono mediante le prime due equazioni.

Esercizio 3.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x = 0$.

[2 p.] Calcolare le coordinate del vertice, nel riferimento iniziale.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(\sqrt{3}, 1)$ per $\lambda = 4$, $(-1, \sqrt{3})$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$4X^2 + 0Y^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right) = 0 \;\Rightarrow\; Y = -4X^2 + X\sqrt{3} \,.$$

Il vertice, nelle vecchie coordinate, è dato da

$$\begin{pmatrix} x_V \\ \\ y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \\ \frac{5\sqrt{3}}{32} \end{pmatrix} \,.$$

Esercizio 4.

[3.5 p.] Al variare di k reale, discutere l'esistenza e il tipo di soluzioni (∞^1 ad es.) per il sistema

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 1 \\ x - y + kz = 4 \\ x + 6y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \,.$$

Sol. Consideriamo il determinante della matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = k^2 - 8k + 15 \ .$$

Per valori diversi da 3 e 5 il rango dell'incompleta vale 3 e quindi garantisce l'esistenza di un'unica soluzione (la completa ha necessariamente rango 3). Per $k = 3$ o $k = 5$ il rango dell'incompleta scende a 2, esistendo un minore di ordine 2 non nullo (in basso a sinistra). Orlando questo minore con la colonna dei termini noti otteniamo

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 7k - 35 \ ,$$

quindi per $k = 5$ il rango scende a 2 anche per la completa e il sistema resta risolubile ma con ∞^1 soluzioni; invece per $k = 3$ la completa sale di rango rispetto all'incompleta e quindi il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 5.

[2.5 p.] Scrivere la formula di Grassmann per i sottospazi S e T che consistono rispettivamente delle matrici 2×2 triangolari inferiori e 2×2 simmetriche, descrivendo nel dettaglio l'intersezione e la somma dei due sottospazi.

Sol. Le dimensioni dei due sottospazi sono entrambe uguali a 3. L'intersezione consiste delle matrici simmetriche triangolari inferiori, quindi abbiamo esattamente le matrici diagonali. La formula di Grassmann assume quindi la seguente forma:

$$dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = dim(S + T) \quad \Rightarrow \quad 3 + 3 - 2 = 4 = dim(S + T) \ .$$

Poiché $S + T$ ha dimensione 4, questo sottospazio coincide in realtà con lo spazio di tutte le matrici 2×2. Infatti è sempre possibile scrivere una data matrice come somma di una triangolare inferiore e una simmetrica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c - b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \ .$$

Le possibilità sono in effetti infinite (∞^2): al variare di p, q arbitrariamente scelti in $\mathbf{R}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ c - b & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - p & b \\ b & d - q \end{pmatrix} \ .$$

- -

- -

Esercizio 1.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (3x + y + 5z, 9x + 3y + 15z, 15x + 5y + 25z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che sia ortogonale al nucleo di f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 5 \\ 9 & 3 - \lambda & 15 \\ 15 & 5 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 31\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda \in \{0, 31\} \ .$$

L'autospazio relativo a $\lambda = 0$ è il nucleo, un piano generato da due qualunque vettori linearmente indipendenti che risolvano l'equazione $3x + y + 5z = 0$ (ad es. $(5, 0, -3)$ e $(0, 5, -1)$). Il secondo autovalore conduce all'autospazio $\{(t, 3t, 5t)\} = \langle (1, 3, 5) \rangle$.

Il vettore $(a, b, c) = (3, 1, 5)$ è chiaramente ortogonale al piano $\pi : 3x + y + 5z = 0$ che è il nucleo (nota: sarebbe idoneo anche il vettore nullo; nel testo era quasi sottinteso ma giustamente, non essendo precisata l'esclusione, è corretta anche questa risposta).

Esercizio 2.

[1.5 p.] Dimostrare che l'asse x e la retta $r : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 10 = 0 \end{cases}$ sono incidenti.

[3.5 p.] Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette date.

[1.5 p.] Aggiungendo alle due equazioni di r una terza equazione che sia il doppio della prima, cosa rappresenta geometricamente questa terza equazione?

Sol. Il punto parametrico $(t, 0, 0)$ deve soddisfare entrambe le equazioni di r, per un valore comune di t. Troviamo in effetti $t = 5$.

Il piano richiesto è del tipo $\lambda(x + y + 2z - 5) + \mu(2x - 3y - 10) = 0$ e deve passare ad esempio per l'origine. Questo vincolo porta alla condizione $\lambda = -2\mu$. Scegliendo $\mu = 1$ otteniamo $\lambda = -2$ e arriviamo infine all'equazione $5y + 4z = 0$.

La terza equazione rappresenta un piano contenente r, ma questo piano coincide col piano definito dalla prima equazione.

Esercizio 3.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2y = 0$.

[2 p.] Calcolare le coordinate del fuoco, nel riferimento iniziale.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(1, \sqrt{3})$ per $\lambda = 4$, $(-\sqrt{3}, 1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$4X^2 + 0Y^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) = 0 \Rightarrow Y = 4X^2 - X\sqrt{3}\ .$$

Il fuoco, nelle vecchie coordinate, è dato da

$$\begin{pmatrix} x_V \\ \\ y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}\ .$$

Esercizio 4.

[3.5 p.] Al variare di k reale, discutere l'esistenza e il tipo di soluzioni (∞^1 ad es.)

per il sistema $\begin{cases} kx + 2y + z = 1 \\ -x + y + kz = 4 \\ 6x + y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$.

Sol. Consideriamo il determinante della matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -1 & 1 & k \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -k^2 + 8k - 15\ .$$

Per valori diversi da 3 e 5 il rango dell'incompleta vale 3 e quindi garantisce l'esistenza di un'unica soluzione (la completa ha necessariamente rango 3). Per $k = 3$ o $k = 5$ il rango dell'incompleta scende a 2, esistendo un minore di ordine 2 non nullo (in basso a sinistra). Orlando questo minore con la colonna dei termini noti otteniamo

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7k + 35\ ,$$

quindi per $k = 5$ il rango scende a 2 anche per la completa e il sistema resta risolubile ma con ∞^1 soluzioni; invece per $k = 3$ la completa sale di rango rispetto all'incompleta e quindi il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 5.

[2.5 p.] Scrivere la formula di Grassmann per i sottospazi S e T che consistono rispettivamente delle matrici 2×2 triangolari superiori e 2×2 simmetriche, descrivendo nel dettaglio l'intersezione e la somma dei due sottospazi.

Sol. Le dimensioni dei due sottospazi sono entrambe uguali a 3. L'intersezione consiste delle matrici simmetriche triangolari superiori, quindi abbiamo esattamente le matrici diagonali. La formula di Grassmann assume quindi la seguente forma:

$$dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = dim(S + T) \quad \Rightarrow \quad 3 + 3 - 2 = 4 = dim(S + T)\ .$$

Poiché $S + T$ ha dimensione 4, questo sottospazio coincide in realtà con lo spazio di tutte le matrici 2×2. Infatti è sempre possibile scrivere una data matrice come somma di una triangolare superiore e una simmetrica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}\ .$$

Le possibilità sono in effetti infinite (∞^2): al variare di p, q arbitrariamente scelti in $\mathbf{R}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & b-c \\ 0 & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-p & c \\ c & d-q \end{pmatrix}\ .$$