Selezionare uno dei tre testi

- -

$\diamondsuit$ Possono esistere 5 matrici simmetriche 3×3 linearmente indipendenti. [V]

$\diamondsuit$ Esistono infiniti piani perpendicolari a due rette sghembe. [F]

$\diamondsuit$ L'eccentricità di un'ellisse può essere la metà di quella di una parabola. [V]

$\diamondsuit$ La molteplicità algebrica di un autovalore in una matrice $n \times n$ può essere uguale a n stesso. [V]

$\bigtriangledown$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che il piano $\pi : 3x - hz + 1 = 0$ sia perpendicolare al vettore $(1, 0, 1)$. $[-3]$

$\bigtriangledown$ Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono l'origine e i punti $(2, 2, 2)$, $(1, -1, 1)$. $[2\sqrt{2}]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la prima coordinata di (π, π, π) rispetto alla base $\{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), (0, 0, 5)\}$. $[\frac{\pi}{\sqrt{3}}]$

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che l'asse z formi un angolo di $60°$ col vettore $(h, h, 1)$. $[\sqrt{\frac{3}{2}}]$.

- -

$\diamondsuit$ Non possono esistere 6 matrici simmetriche 3×3 linearmente indipendenti. [F]

$\diamondsuit$ Esiste un unico versore perpendicolare a un dato piano nello spazio. [F]

$\diamondsuit$ L'eccentricità di un'ellisse può essere la metà di quella di un'iperbole. [V]

$\diamondsuit$ La molteplicità algebrica di un autovalore in una matrice $n \times n$ non può essere uguale a n stesso. [F]

$\bigtriangledown$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che il piano $\pi : 2x + hz + 1 = 0$ sia perpendicolare al vettore $(1, 0, 1)$. $[2]$

$\bigtriangledown$ Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono l'origine e i punti $(3, 3, 3)$, $(1, -1, 1)$. $[3\sqrt{2}]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la seconda coordinata di (π, π, π) rispetto alla base $\{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), (0, 0, 5)\}$. $[0]$

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che l'asse y formi un angolo di $60°$ col vettore $(h, 1, 1)$. $[\sqrt{2}]$.

- -

$\diamondsuit$ Possono esistere 7 matrici simmetriche 3×3 linearmente indipendenti. [F]

$\diamondsuit$ 4 punti allineati sono contenuti in infiniti piani. [V]

$\diamondsuit$ L'eccentricità di un'ellisse è maggiore di 0 e minore di 1. [F]

$\diamondsuit$ La molteplicità geometrica di un autovalore in una matrice $n \times n$ può essere uguale a n stesso. [V]

$\bigtriangledown$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che il piano $\pi : hx + 2y + hz + 1 = 0$ sia perpendicolare al vettore $(-2, -4, -2)$. $[1]$

$\bigtriangledown$ Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono l'origine e i punti $(3, 3, 3)$, $(1, -2, 1)$. $[\frac{9}{\sqrt{2}}]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la prima coordinata di (π, π, π) rispetto alla base $\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (0, 0, 2)\}$. $[\frac{\pi}{\sqrt{2}}]$

$\bigtriangledown$ Determinare h, positivo, in modo che l'asse z formi un angolo di $30°$ col vettore $(h, 0, 1)$. $[\sqrt{\frac{1}{3}}]$.

Selezionare uno dei due testi

- -

Esercizio 1.

[2.5 p.] Calcolare due autovettori non proporzionali per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (7x + 7y + z, 7y + z, z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che non appartenga al sottospazio generato dagli autovettori.

[2 p.] Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 7 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \{1, 7\} \; .$$

L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è generato da $(1, -6, 36)$. L'autovalore 7 conduce all'autospazio $(t, 0, 0) = \langle(1, 0, 0)\rangle$.

Ad esempio il vettore $(0, 0, 1)$ è idoneo perché

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 36 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \; .$$

La funzione in esame è iniettiva perché il rango è uguale alla dimensione del dominio, quindi vettori distinti hanno immagini distinte.

Esercizio 2.

In un riferimento O_{xyz} sia $\mathcal{P}$ l'insieme (fascio di piani) di tutti i piani contenenti l'asse y.

[0.5 p.] Scrivere l'equazione generale di questo fascio proprio $\mathcal{P}$.

[2.5 p.] Stabilire se esistono piani di $\mathcal{P}$ che formano un angolo di 45° col piano $\pi : 3y + z = 2$.

[2 p.] Determinare i piani di $\mathcal{P}$ aventi distanza 3 dal punto $(5, 0, 0)$.

[1.5 p.] Dimostrare che l'asse y e la retta $r : \begin{cases} x = 2 \\ 5y - 4z = 0 \end{cases}$ sono rette sghembe.

Sol. Il fascio in esame può essere descritto dall'equazione generale

$$\lambda x + \mu z = 0$$

perché l'asse y è definito mediante il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Non esistono piani con angolo di 45° perché l'equazione

$$\frac{|(\lambda, 0, \mu) \times (0, 3, 1)|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; 10\lambda^2 + 8\mu^2 = 0$$

non ammette soluzioni reali che non siano entrambe nulle.

Risolvendo invece l'equazione

$$\frac{|5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 3$$

arriviamo a $16\lambda^2 = 9\mu^2$ che equivale a $\lambda = \pm\frac{3}{4}\mu$; ad esempio per $\mu = 4$ abbiamo $\lambda = \pm 3$ e troviamo le due equazioni $\pm 3x + 4z = 0$.

Le due rette sono sghembe perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \; .$$

Esercizio 3.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}y = 0$.

[2 p.] Scrivere un'equazione della direttrice, nel riferimento iniziale.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(3,-1)$ per $\lambda = 10$, $(1,3)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$10X^2 + 0Y^2 - \sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}(-X+3Y) = 0 \;\Rightarrow\; Y = \frac{10}{3}X^2 + \frac{1}{3}X \; .$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della direttrice è

$$Y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \;\Rightarrow\; Y = -\frac{1}{12} \; .$$

Per arrivare all'equazione nel riferimento originale dobbiamo considerare le formule inverse:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; .$$

Prelevando l'unica variabile coinvolta, la Y, abbiamo così

$$\frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y) = -\frac{1}{12} \;\Rightarrow\; 12x + 36y + \sqrt{10} = 0 \; .$$

Esercizio 4.

[2.5 p.] Stabilire se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,0,3)$ è l'unica soluzione (oltre a quella nulla) del sistema

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 66x_1 + 63x_2 + 70x_3 - 65x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \; .$$

[2 p.] Determinare un vettore ortogonale al sottospazio delle soluzioni.

Sol. La terza equazione è chiaramente una combinazione lineare delle prime due, nel dettaglio $E_3 = 65E_1 + E_2$. Le tre restanti equazioni omogenee sono linearmente indipendenti perché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (ad es. il minore relativo alle prime tre colonne non è nullo). Per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo quindi ∞^{4-3} soluzioni: la soluzione proposta è soltanto una delle infinite soluzioni.

Ciascuna equazione può essere letta come una condizione di ortogonalità. Ad esempio la prima equazione ha una scrittura alternativa come

$$(1,1,1,-1) \times (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \; .$$

Il vettore dei coefficienti. $(1,1,1,-1)$, è pertanto ortogonale a qualunque vettore delle soluzioni. In realtà anche il vettore nullo sarebbe idoneo.

- -

- -

Esercizio 1.

[2.5 p.] Calcolare due autovettori non proporzionali per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (8x + 8y + z, 8y + z, z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che non appartenga al sottospazio generato dagli autovettori.

[2 p.] Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine secondo f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 1 \\ 0 & 8-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \{1, 8\} \; .$$

L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è generato da $(1, -7, 49)$. L'autovalore 8 conduce all'autospazio $(t, 0, 0) = \langle(1, 0, 0)\rangle$.

Ad esempio il vettore $(0, 0, 1)$ è idoneo perché

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 49 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \ .$$

La funzione in esame è suriettiva perché il rango è uguale alla dimensione del codominio, quindi non esistono vettori che non abbiano controimmagine.

Esercizio 2.

In un riferimento O_{xyz} sia $\mathcal{P}$ l'insieme (fascio di piani) di tutti i piani contenenti l'asse z.

[0.5 p.] Scrivere l'equazione generale di questo fascio proprio $\mathcal{P}$.

[2.5 p.] Stabilire se esistono piani di $\mathcal{P}$ che formano un angolo di 45° col piano $\pi : y + 3z = 2$.

[2 p.] Determinare i piani di $\mathcal{P}$ aventi distanza 3 dal punto $(4, 0, 0)$.

[1.5 p.] Dimostrare che l'asse z e la retta $r : \begin{cases} x = 2 \\ 4y - 5z = 0 \end{cases}$ sono rette sghembe.

Sol. Il fascio in esame può essere descritto dall'equazione generale

$$\lambda x + \mu y = 0$$

perché l'asse z è definito mediante il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Non esistono piani con angolo di 45° perché l'equazione

$$\frac{|(\lambda, \mu, 0) \times (0, 1, 3)|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Leftrightarrow \ 10\lambda^2 + 8\mu^2 = 0$$

non ammette soluzioni reali che non siano entrambe nulle.

Risolvendo invece l'equazione

$$\frac{|4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 3$$

arriviamo a $7\lambda^2 = 9\mu^2$ che equivale a $\lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}\mu$; ad esempio per $\mu = \sqrt{7}$ abbiamo $\lambda = \pm 3$ e troviamo le due equazioni $\pm 3x + \sqrt{7}y = 0$.

Le due rette sono sghembe perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \ .$$

Esercizio 3.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $9x^2 + 6xy + y^2 - \sqrt{10}y = 0$.

[2 p.] Scrivere un'equazione della direttrice, nel riferimento iniziale.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(3, 1)$ per $\lambda = 10$, $(-1, 3)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$10X^2 + 0Y^2 - \sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}(X + 3Y) = 0 \ \Rightarrow \ Y = \frac{10}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \ .$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della direttrice è

$$Y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \ \Rightarrow \ Y = -\frac{1}{12} \ .$$

Per arrivare all'equazione nel riferimento originale dobbiamo considerare le formule inverse:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Prelevando l'unica variabile coinvolta, la Y, abbiamo così

$$\frac{1}{\sqrt{10}}(-x+3y) = -\frac{1}{12} \;\Rightarrow\; 12x - 36y - \sqrt{10} = 0 \ .$$

Esercizio 4.

[2.5 p.] Stabilire se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 3, 0)$ è l'unica soluzione (oltre a quella nulla) del sistema $\mathcal{S}: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 66x_1 + 63x_2 - 65x_3 + 70x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

[2 p.] Determinare un vettore ortogonale al sottospazio delle soluzioni.

Sol. La terza equazione è chiaramente una combinazione lineare delle prime due, nel dettaglio $E_3 = 65E_1 + E_2$. Le tre restanti equazioni omogenee sono linearmente indipendenti perché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (ad es. il minore relativo alle ultime tre colonne non è nullo). Per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo quindi ∞^{4-3} soluzioni: la soluzione proposta è soltanto una delle infinite soluzioni.

Ciascuna equazione può essere letta come una condizione di ortogonalità. Ad esempio la prima equazione ha una scrittura alternativa come

$$(1, 1, -1, 1) \times (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \ .$$

Il vettore dei coefficienti. $(1, 1, -1, 1)$, è pertanto ortogonale a qualunque vettore delle soluzioni. In realtà anche il vettore nullo sarebbe idoneo.