♢ Non esistono funzioni lineari suriettive da $\mathbf{R}^3$ allo spazio delle matrici simmetriche 2×2. [F]

♢ In $\mathbf{R}^4$ esistono infinite basi. [V]

♢ In $\mathbf{R}^1$ i numeri 2 e 9 sono linearmente dipendenti. [V]

♢ Il prodotto scalare di due versori dello spazio non supera in alcun caso 1. [V]

▽ Determinare k in modo che la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (0, ky - z, 3z)$ abbia l'autovettore $(0, 1, 1)$. [4]

▽ Determinare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ (funzione lineare) che associa ciascuno dei 5 vettori della base canonica di $\mathbf{R}^5$ al vettore $(8, 8)$. [4]

▽ Determinare il numero nel posto $(2, 3)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[-\frac{1}{4}]$

▽ Determinare h in modo che un vettore direttore della retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - hz = 3 \end{cases}$ sia $(2, 2, 2)$. [1].

- -

♢ Non esistono funzioni lineari iniettive da $\mathbf{R}^4$ allo spazio delle matrici simmetriche 2×2. [V]

♢ In $\mathbf{R}^4$ esistono più di 4 basi. [V]

♢ In $\mathbf{R}^1$ i numeri 2 e 9 sono linearmente indipendenti. [F]

♢ Il prodotto scalare di due versori dello spazio può essere negativo. [V]

▽ Determinare k in modo che la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (0, ky - z, 5z)$ abbia l'autovettore $(0, 1, 1)$. [6]

▽ Determinare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^3$ (funzione lineare) che associa ciascuno dei 6 vettori della base canonica di $\mathbf{R}^6$ al vettore $(8, 8, 8)$. [5]

▽ Determinare il numero nel posto $(3, 2)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[\frac{1}{2}]$

▽ Determinare h in modo che un vettore direttore della retta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 3y + hz = 2 \end{cases}$ sia $(2, -2, 2)$. [3].

Esercizio 1.

In un riferimento O_{xyz} sono dati i punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (1, 2, 3)$, $D = (8, 8, 8)$.

[3.5 p.] Scrivere equazioni cartesiane della retta che sia perpendicolare al triangolo (ABC) e passi per A.

[3 p.] Tra i punti P della retta passante per A e per l'origine degli assi O, esistono quelli che formano un angolo $D\widehat{P}C$ retto?

[2.5 p.] Calcolare la proiezione ortogonale vettoriale di $\overrightarrow{AB}$ sul piano contenente A, C e D.

Sol. Un vettore direttore della retta richiesta è $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1) \wedge (1, 1, 3) = (-1, -2, 1)$.

Partendo ora dalle equazioni parametriche $x = -t$, $y = 1 - 2t$, $z = t$ otteniamo facilmente le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} .$$

Il punto mobile $P(t) = (0, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (0, t, 0)$, deve soddisfare l'equazione

$$\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PC} = 0 \;\Rightarrow\; (8, 8 - t, 8) \times (1, 2 - t, 3) = 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 10t + 48 = 0$$

che tuttavia non ha soluzioni reali. Non esiste alcun punto idoneo.

Per calcolare la proiezione ortogonale richiesta partiamo dalla base $\{(1, 1, 3), (8, 7, 8)\}$ e ortogonalizziamo il secondo vettore ottenendo

$$(8, 7, 8) - \frac{39}{11}(1, 1, 3) = \frac{1}{11}(49, 38, -29) ,$$

moltiplichiamo il vettore per 11 e infine calcoliamo

$$\underline{p} = \frac{(1, 0, 1) \times (1, 1, 3)}{(1, 1, 3) \times (1, 1, 3)}(1, 1, 3) + \frac{(1, 0, 1) \times (49, 38, -29)}{(49, 38, -29) \times (49, 38, -29)}(49, 38, -29) = ...$$

ma un metodo molto più spedito consiste nel proiettare sul vettore normale $(1,1,3) \wedge (8,7,8) = (-13,16,-1)$ per poi sottrarre: abbiamo, in dettaglio,

$$\underline{p} = (1,0,1) - \frac{(1,0,1) \times (-13,16,-1)}{(-13,16,-1) \times (-13,16,-1)}(-13,16,-1) =$$
$$= (1,0,1) + \frac{7}{213}(-13,16,-1) = \left(\frac{122}{213}, \frac{112}{213}, \frac{206}{213}\right) \ .$$

Esercizio 2.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 5x+z, 9x-2y-z)$.

[2 p.] Determinare un vettore che non appartenga all'immagine di f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 5 & 0-\lambda & 1 \\ 9 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 36\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda \in \{-6,0,6\} \ .$$

Risolvendo i corrispondenti sistemi omogenei otteniamo ad es. i rispettivi autovettori $(2,-1,-4)$, $(1,7,-5)$, $(1,1,1)$.

Il vettore richiesto non deve essere generato dalle colonne della matrice, quindi occorre trovare una quarta colonna che faccia salire a 3 il rango della matrice completa. Ad esempio con $(1,0,0)$ otteniamo un minore 3×3 non nullo.

Esercizio 3.

[3 p.] Stabilire se esistono valori reali di k che rendono uguale a 3 la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori $(1,1,0,k,1)$, $(k-2,0,2,1,k)$, $(2,k,-2,k^2-1,0)$.

[2.5 p.] Per $k=0$ scrivere equazioni cartesiane del relativo sottospazio.

Sol. Applichiamo il teorema degli orlati alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k & 1 \\ k-2 & 0 & 2 & 1 & k \\ 2 & k & -2 & k^2-1 & 0 \end{pmatrix}$$

fissando la sottomatrice relativa a $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, $\underline{c}_2^t$, $\underline{c}_3^t$. Notiamo che i tre minori sono tutti nulli, quindi il rango è uguale a 2 per ogni valore di k.

Le equazioni possono essere ottenute imponendo che valga 2 il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \ .$$

Fissando la sottomatrice in alto a sinistra otteniamo tre orli che forniscono le rispettive equazioni:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_5 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases} \ .$$

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $6xy - 5 = 0$.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda = 3$, $(-1,1)$ per $\lambda = -3$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $3X^2 - 3Y^2 = 5$, da cui segue la forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{5}{3}} - \frac{Y^2}{\frac{5}{3}} = 1 \ .$$