Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.

Punteggio totale: 32.5

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. [2.5] Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, determinare $p \in \mathbf{R}$ in modo che i punti $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (p\,,\,-3\,,\,p-5)$ risultino allineati.
[2.5] Posto $p = 5$, scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per A e perpendicolare alla retta contenente B e C.
[2.5] Determinare infine p in modo che il triangolo (ABC) sia rettangolo in B.

Sol. Per $p = 4$ i punti danno luogo a due vettori linearmente dipendenti (imponendo che scenda a 1 il relativo rango).
Un'equazione è $4(x + 2) - 3(y - 3) + 0(z - 1)$ ecc.
Con $p = -\frac{11}{2}$ i vettori $(-3, 3, 1)$ e $(p - 1, -3, p - 5)$ sono ortogonali.

2. [3.5] Data la funzione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da $f(x, y, w, z) = (x+2y+w+z, w+z, z, 7z)$, calcolarne tre autovettori linearmente indipendenti.
[2] Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol. Autovalori: 1, 7, 0 con rispettivi autovettori $(1, 0, 0, 0)$, $(12, 8, 7, 49)$, $(2, -1, 0, 0)$.
Questa funzione non è iniettiva, quindi esistono coppie con la stessa immagine.

3. [3] Scrivere equazioni cartesiane (il minimo numero) relative al sottospazio T, in $\mathbf{R}^4$, generato dai vettori $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 1)$.

[2] Determinare $a \in \mathbf{R}$ in modo che il vettore $(a + 1, a, 3a, -5a - 1)$ appartenga a $T^\perp$ (sottospazio ortogonale).

Sol. Dopo aver eliminato il terzo vettore imponiamo che

$$rank \begin{pmatrix} x & y & w & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

e con due orli intorno alla sottomatrice in basso a sinistra abbiamo $x - w = y - z = 0$.
Con $a = -\frac{1}{4}$ il vettore dato è ortogonale ai due generatori.

4. Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} t & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

[2.5] Determinare t in modo che $(1, 3)$ sia un autovettore per M.
[2] Determinare invece t in modo che M^3 abbia il determinante uguale a 64.
[2.5] Dimostrare che per qualunque valore reale di t la matrice M ammette due autovalori reali distinti.

Sol. Per $t = -\frac{29}{3}$ il vettore $(1, 3)$ è proporzionale a $(t + 12, 7)$.
Grazie al teorema di Binet è sufficiente imporre che $|M|$ valga 4, perciò troviamo $t = 4$.
Il polinomio caratteristico è uguale a

$$\lambda^2 - (t + 2)\lambda + 2t - 4$$

e il suo discriminante è positivo per ogni valore di t.

5. [3] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $16x^2 + 8xy + y^2 + \sqrt{17}y = 0$.
[2] Determinare le coordinate originali del fuoco di questa conica.

Sol. Autovettori: $(4, 1)$ per $\lambda = 17$, $(-1, 4)$ per $\lambda = 0$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}(X + 4Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$Y = -\frac{17}{4}X^2 - \frac{X}{4} \ .$$

Sostituendo le nuove coordinate del fuoco (X_F, Y_F) nella legge del cambiamento di coordinate, otteniamo le coordinate iniziali (x_F, y_F).

6. [2.5] Determinare una base del sottospazio costituito dalle matrici diagonali 4×4, contenuto nell'usuale spazio vettoriale delle matrici 4×4.

Sol. Possiamo scegliere ad esempio le quattro matrici con tutti zeri ad eccezione di un 1 nel posto (i, i), con $1 \leq i \leq 4$.