Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 32. I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

In un riferimento $Oxyz$ sono dati i piani $\pi : x + z + 1 = 0$ e $\pi' : y - z = 3$.

$\boxed{\textbf{2.5}}$ Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela ai due piani e passante per l'origine.

$\boxed{\textbf{3.5}}$ Scrivere equazioni cartesiane dei due piani contenenti l'asse z e formanti lo stesso angolo con entrambi i piani dati.

Sol. Alteriamo i termini noti in modo che le due equazioni siano soddisfatte dal punto $(0, 0, 0)$; dobbiamo semplicemente porre i termini noti uguali a zero ottenendo quindi $x + z = y - z = 0$.

Imponiamo, poi, che il piano del fascio proprio descritto dall'equazione $\lambda x + \mu y = 0$ dia lo stesso coseno:

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{|\mu|}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} ,$$

ottenendo quindi ad es. $\lambda = 1$, $\mu = \pm 1$. Le rispettive equazioni sono $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

Esercizio 2.

Dato $t \in \mathbf{R}$, definiamo l'applicazione lineare $f_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante la legge[1]

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, ty + z) .$$

$\boxed{\textbf{2.5}}$ Determinare i valori di t per i quali f_t ammette tre autovalori reali e distinti.

$\boxed{\textbf{3}}$ Fissato poi $t = 4$, determinare una base di autovettori per f_4 (in breve, f) in $\mathbf{R}^3$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Stabilire se esistono valori di t per i quali l'immagine di f_t coincide col codominio.

Sol. Analizziamo l'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & t & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^3 - 4\lambda^2 + (3 - 2t)\lambda = 0 .$$

Abbiamo la soluzione 0 per ogni t, mentre il discriminante (diviso per 4) dell'equazione di secondo grado restante vale $1 + 2t$. Di conseguenza, per $t < -\frac{1}{2}$ esiste soltanto un autovalore reale; per $t = -\frac{1}{2}$ ne esistono due (i due autovalori coincidenti sono uguali a 2); per $t > -\frac{1}{2}$ siamo nelle condizioni richieste ma dobbiamo escludere $t = \frac{3}{2}$ perché porterebbe a un'ulteriore soluzione uguale a 0.

Fissato $t = 4$ otteniamo gli autovalori 0, -1, 5 con i rispettivi autovettori $(3, 1, -4)$, $(1, 2, -4)$, $(1, 2, 2)$.

Non esistono valori che soddisfino l'ultima richiesta perché il rango non vale 3 in alcun caso.

Esercizio 3.

$\boxed{\textbf{3}}$ Esibire un'idonea rotazione e trasformare l'equazione $x^2 + 12xy + 36y^2 - \sqrt{37}x = 0$ nella forma canonica di una parabola.

$\boxed{\textbf{2}}$ Calcolare l'equazione della sua direttrice, nel riferimento iniziale.

Sol. Autovettori: $(1, 6)$ per $\lambda = 37$, $(6, -1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le nuove variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo l'equazione $37X^2 - \sqrt{37}\frac{1}{\sqrt{37}}(X - 6Y)$ che porta alla forma canonica

$$Y = -\frac{37}{6}X^2 + \frac{X}{6} .$$

La direttrice è caratterizzata dall'equazione

$$Y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} = \frac{1}{24} .$$

[1] (manca l'indice)

Sostituendo le coordinate secondo la legge inversa,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(in realtà occorre soltanto conoscere la formula della Y), otteniamo l'equazione originale: $-6x + y = \frac{\sqrt{37}}{24}$.

Esercizio 4.

$\boxed{3}$ Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 1, 0)$ nel sottospazio S di $\mathbf{R}^4$ definito dalle equazioni $x + y + w + z = 0$, $x - z = 0$.

$\boxed{2}$ Considerando il sottospazio S come il nucleo di un'idonea applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, stabilire se g è suriettiva.

Sol. Una base ortogonale di S è $\{(1, -1, -1, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ (possiamo ottenerla risolvendo il sistema e, se necessario, ortogonalizzando i due vettori risultanti). La proiezione richiesta è

$$\underline{p} = \frac{0}{4}(1, -1, -1, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) .$$

La funzione g è suriettiva perché la dimensione dell'immagine $(4 - 2)$ coincide con la dimensione del codominio.

Esercizio 5.

$\boxed{3.5}$ Dimostrare che per qualunque scelta del numero reale k i vettori $(1, 2, 3k)$, $(3, 4, k)$, $(-1, 0, 5k)$, $(4, 6, 4k)$ non possono generare il vettore $(1, 1, 1 - k)$.

Sol. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3k & k & 5k & 4k \end{pmatrix} .$$

per $k = 0$ essa ha rango 2. Con $k \neq 0$ consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha il medesimo rango. La terza riga è facilmente ottenibile come combinazione della prima e seconda riga (ragioniamo sul -1 e sullo 0, ecc.): $\underline{r}_3 = -5\underline{r}_1 + 8\underline{r}_2$. Il rango resta quindi 2 in ogni caso. Di conseguenza, trasferendo l'analisi alle colonne iniziali, è possibile scegliere al massimo 2 vettori linearmente indipendenti tra i 4 dati; scegliamo ad es. i primi due (non sono infatti proporzionali). Ora, il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3k & k & 1 - k \end{pmatrix}$$

è uguale a -2, quindi la terza colonna non può essere generata dalle altre due (né da tutti i 4 vettori dati, per quanto visto).

Esercizio 6.

$\boxed{2.5}$ Determinare l'inversa della matrice risultante dal prodotto

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{28} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Sol.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 7.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Stabilire se l'insieme dei vettori ortogonali al piano di equazione $x + y + z = 2$ costituisce uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni.

Sol.

La risposta è affermativa; si tratta del sottospazio 1-dimensionale $\langle(1, 1, 1)\rangle$.