GEOMETRIA – Prova scritta telematica del 10 settembre 2020, ore 14.00.
Durata totale: 2 ore e 5 minuti (escluso il caricamento delle foto). Punteggio totale: 26.

La prova consiste di una sequenza di 4 sessioni exam.net. Per ciascuna sessione lo studente deve selezionare e risolvere uno dei 4 esercizi **(può decidere liberamente l'ordine)**. Al termine di ogni sessione deve essere inviata la risoluzione (con giustificazioni delle risposte) mediante una o più foto da caricare nel sito exam.net.

È ammessa la prosecuzione di un esercizio nelle sessioni successive, purché venga indicato con chiarezza il riferimento precedente (ad es. con un asterisco e una nota).

Scrivere NOME e COGNOME in ciascun foglio inviato.

La durata della prima sessione è di 35 minuti, al fine di consentire un'analisi globale con programmazione della sequenza di esercizi da svolgere.

....

Esercizio 1.

[2.5 punti] Stabilire se esistono valori di k che rendono allineati i punti $A = (2, 4, 1)$, $B = (k, k, k)$, $C = (0, 1, -1)$.

SOL. Imponiamo che siano proporzionali i vettori $\overrightarrow{AB} = (k-2, k-4, k-1)$ e $\overrightarrow{CA} = (2, 3, 2)$. Otteniamo

$$\frac{k-2}{2} = \frac{k-4}{3} = \frac{k-1}{2} \ .$$

Dalle prima uguaglianza otteniamo $3k - 6 = 2k - 8 \Rightarrow k = -2$, ma la proporzionalità non viene mantenuta se sostituiamo -2 nella terza frazione. Dunque non esiste alcun valore per l'allineamento.

[2.5 punti] Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per A e C, parallelo inoltre all'asse z.

SOL.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ 3x - 2y + 2 = 0 \ .$$

[3 punti] Determinare l'intervallo dei valori di k che rendono ottuso l'angolo $A\hat{B}C$.

SOL. Il prodotto scalare $(2-k, 4-k, 1-k) \times (-k, 1-k, -1-k)$ deve essere negativo. Otteniamo

$$3k^2 - 7k + 3 < 0 \Rightarrow \frac{7-\sqrt{13}}{6} < k < \frac{7+\sqrt{13}}{6} \ .$$

Esercizio 2.

[2.5 punti] Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (9x + y + z, 9y + z, 7z)$, determinarne gli autovettori (a meno di un fattore di proporzionalità).

SOL. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 9-s & 1 & 1 \\ 0 & 9-s & 1 \\ 0 & 0 & 7-s \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ s \in \{7, 9\} \ .$$

Per $s = 7$ troviamo l'autovettore, $(0, 0, 1)$, mentre l'autospazio di $s = 9$ ha dimensione soltanto 1, con autovettore $(1, 0, 0)$.

[1.5 punti] Stabilire se esiste una base che rende diagonale la matrice di f, a seguito di un cambiamento di coordinate.

SOL. L'applicazione non è diagonalizzabile perché non esiste una base di autovettori.

[1.5 punti] Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine secondo f.

SOL. Tutti i vettori hanno controimmagine perché f è in particolare suriettiva.

Esercizio 3.

[2.5 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 0, 1)$ sul sottospazio S definito dalle equazioni $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$.

SOL. Una base di S, già ortogonale, è $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Ora proiettiamo:

$$\frac{(0,1,0,1)\times(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\times(1,1,0,0)}(1,1,0,0)+\frac{(0,1,0,1)\times(0,0,1,1)}{(0,0,1,1)\times(0,0,1,1)}(0,0,1,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) .$$

[3.5 punti] Dato il sottospazio T definito dalla sola equazione $x_4 = 0$, calcolare una base di $S \cap T$ e verificare la formula di Grassmann per S e T.

SOL. Il sistema formato dalle tre equazioni restituisce $\{(t, t, 0, 0) : t \in \mathbf{R}\}$.

Una base di T è la base canonica di $\mathbf{R}^4$ privata di $(0, 0, 0, 1)$. I suoi tre vettori insieme ai due generatori di S generano l'intero $\mathbf{R}^4$ (il rango della relativa matrice vale 4). Inoltre $dim(S) = 2$ e $dim(T) = 3$. Ne segue che la formula di Grassmann ha la seguente forma:

$$2 + 3 = 1 + 4 .$$

Esercizio 4.

[3 punti] Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$.

SOL. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$2X^2 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)\right) = 0 \Rightarrow Y = X^2 .$$

[2 punti] Determinare le coordinate originali del fuoco.

SOL.

$$\begin{pmatrix} x_F \\ \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

[1.5 punti] Modificare il coefficiente del monomio y^2 nell'equazione iniziale, ponendolo uguale a una variabile p, in modo che la conica risultante sia un'ellisse (descrivere tutti i ossibili valori di p).

SOL. Il relativo determinante è uguale a $p - 1$, quindi per $p > 1$ otteniamo un'ellisse.