GEOMETRIA – Prova scritta dell'11 settembre 2020, ore 15.00.

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

Esercizio 1.

Determinare gli eventuali valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori

$$(k, k, 1, 2)\ ,\ (0, 1, 0, 1)\ ,\ (2, 3, 2k, 5)\ .$$

Ponendo $k = 0$, determinare un vettore che non appartenga al sottospazio generato da tali vettori.

Calcolare la proiezione ortogonale del terzo vettore nel sottospazio generato dai primi due (sempre per $k = 0$).

SOL. Mediante il teorema degli orlati applicato alla matrice che ha come righe i vettori dati, considerando il minore di ordine 2 in alto a destra, otteniamo le condizioni $2k^2-2 = 0$ e $2k^2-4k+2 = 0$. L'unica soluzione in comune è $k = 1$.

Per la seconda richiesta è idoneo qualunque vettore che alzi a 4 il rango della relativa matrice. Ad es. $(0, 0, 0, 1)$ dà

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ortogonalizzando il primo vettore rispetto al secondo otteniamo

$$(0, 0, 1, 2) - \frac{2}{2}(0, 1, 0, 1) = (0, -1, 1, 1)\ .$$

Ora calcoliamo la proiezione:

$$\frac{2}{3}(0, -1, 1, 1) + \frac{8}{2}(0, 1, 0, 1) = \left(0, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)\ .$$

Esercizio 2.

Calcolare una base del nucleo relativo all'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, w, z) = (x + y + w + z, x + y, w + z)$.

Verificare che la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine vale 4.

SOL. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + w + z = 0 \\ x + y = 0 \\ w + z = 0 \end{cases}.$$

Il rango della matrice incompleta vale 2; otteniamo ∞^{4-2} soluzioni, ad es. del tipo $(s, -s, t, -t)$. Come base possiamo dunque scegliere $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.

In coordinate canoniche, l'immagine è generata dalle colonne della relativa matrice. Esse sono $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$. Una base consiste quindi di due vettori e la verifica è conclusa.

Esercizio 3.

Stabilire se $(3, 2, 1)$ è un autovettore per l'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$g(1, 0, 0) = (2, 2, 2)\ ,\ g(0, 1, 0) = (1, 1, 3)\ ,\ g(0, 0, 1) = (1, -2, -9)\ .$$

SOL. Utilizzando la linearità di g otteniamo

$$g(3,2,1) = 3(2,2,2) + 2(1,1,3) + 1(1,-2,-9) = (9,6,3) \ ,$$

quindi siamo in presenza di un autovettore con relativo autovalore uguale a 3.

Esercizio 4.

Determinare equazioni parametriche della retta passante per l'origine e perpendicolare al piano π di equazione $4x + y - z + 11 = 0$.

Tra i punti di tale retta, determinare quelli distanti 10 dal piano di equazione $x + y - 4z + 1 = 0$. Calcolare il coseno dell'angolo acuto θ formato dal piano π col piano xy.

SOL. $x = 4t$, $y = t$, $z = -t$.

Utilizzando la formula della distanza otteniamo

$$\frac{|4t + t + 4t + 1|}{\sqrt{18}} = 10 \ \Rightarrow \ t = \frac{\pm 10\sqrt{18} - 1}{9} \ .$$

Sostituendo i due valori otteniamo i punti richiesti.

$$\cos\theta = \frac{|(0,0,1) \times (4,1,-1)|}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \ .$$

Esercizio 5.

Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'ellisse di equazione $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 5y^2 - 12 = 0$. (facilitazione: al termine dei relativi calcoli, gli autovettori risultano uguali ad es. a $(\sqrt{2}, -1)$ e $(1, \sqrt{2})$ – da normalizzare.)

Calcolare le coordinate originali dei due fuochi.

Calcolare l'eccentricità di tale conica.

SOL.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ \Rightarrow$$

$$3X^2 + 6Y^2 - 12 = 0 = 0 \ \Rightarrow \ \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1 \ .$$

Sostituendo le coordinate nuove dei fuochi nella legge del cambiamento di coordinate, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Infine

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$