[**1**] Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e incidente le rette $r : x - y - 1 = y - z = 0$ e $s : 3x - y = z + 1 = 0$.

Sol. Possiamo ottenere la retta richiesta mediante l'intersezione di due piani. Il piano che contiene l'origine e r è della forma $\lambda(x - y - 1) + \mu(y - z) = 0$; imponendo il passaggio per l'origine troviamo $\lambda = 0$, quindi un'equazione del piano è $y - z = 0$; similmente, il piano contenente s e l'origine nasce dal fascio proprio $\lambda(3x - y) + \mu(z + 1) = 0$ e una sua equazione è $3x - y = 0$. Le due equazioni trovate danno la risposta.

[**2**] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x = 0$. Calcolare le coordinate originali del vertice.

Sol. Autovettori: $(4, -3)$ per $\lambda = 25$, $(3, 4)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $25X^2 + 0 \cdot Y^2 - 5 \cdot \frac{1}{5}(4X + 3Y)$, o meglio

$$Y = \frac{25}{3}X^2 - \frac{4}{3}X \ .$$

Il vertice, nelle nuove coordinate, è $(\frac{2}{25}, -\frac{4}{75})$. Inserendo queste coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{25} \\ -\frac{4}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{125} \\ -\frac{34}{375} \end{pmatrix} \ .$$

[**3**] Calcolare la proiezione ortogonale di $(3, 0, 0, 0)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di S. Determinare un vettore che non appartenga a S.

Sol. La dimensione di S vale 2. Ortogonalizzando il primo vettore rispetto al secondo otteniamo $(1, 1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 1)$. La proiezione è uguale a

$$\frac{3}{2}(1, 0, 1, 0) + \frac{0}{4}(0, 1, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) \ .$$

Dalle equazioni parametriche $(x, y, w, z) = s(0, 1, 0, 1) + t(1, 0, 1, 0)$, o con altri metodi semplici in questo caso, otteniamo $x - w = y - z = 0$.

Qualunque vettore che non soddisfi almeno un'equazione, non appartiene a S.

[**4**] È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, 2x + 2y + 2z)$. Calcolare una base di autovettori per f. Determinare due vettori linearmente indipendenti che abbiano la stessa immagine.

Sol. L'autovalore 0 è relativo all'autospazio $x + y + z = 0$ con base ad es. $\{1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$. L'autovalore 4 ha ad es. un autovettore uguale a $(1, 1, 2)$. Due vettori linearmente indipendenti del nucleo – ad es. i primi due autovettori – hanno la stessa immagine.

[**5**] Tra i piani contenenti l'asse z determinare quelli che formano un angolo di $30°$ col piano $\pi : 2x - y - z + 5 = 0$.

Sol. Utilizzando il fascio di piani di equazione $\lambda x + \mu y = 0$ dobbiamo imporre che

$$\frac{|2\lambda - \mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Possiamo supporre che λ non sia nullo, dato che in quel caso l'equazione non sarebbe valida. Dividendo quindi per λ, o meglio ponendolo uguale a 1 nella formula, restiamo con

$$4(2 - \mu)^2 = 3(1 + \mu^2) \cdot 6 \Rightarrow 7\mu^2 + 8\mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu \in \left\{-1, -\frac{1}{7}\right\} \ .$$

Possiamo ora sostituire le due coppie di valori, trovando così due piani.