1. Studiando il relativo coseno, dimostrare che il piano $\pi : 4x - 3z + 2 = 0$ forma un angolo maggiore di $45°$ col piano $\pi' : x + y + 6 = 0$. Tra i piani paralleli a π, determinare quelli distanti 10 dall'origine.

Sol. $\frac{(4,0,-3)\times(1,1,0)}{5\sqrt{2}}$ è minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La formula della distanza, per i piani di equazione $4x - 3z + d = 0$, dà $d = \pm 50$.

2. Determinare il valore di t che rende l'asse y complanare alla retta r di equazioni $7x + 8y + tz + t = 2x + 3y - z + 2 = 0$. Posto successivamente $t = 0$, determinare il punto di r che ha la seconda coordinata uguale alla terza.

Sol. Imponendo l'annullamento del determinante della matrice 4×4 relativa a r e alla retta di equazioni $x = z = 0$, si ottiene $t = \frac{16}{3}$. Per la seconda parte, basta aggiungere la condizione $y = z$ alle due equazioni di r, trovando così il punto $(-8, 7, 7)$.

3. Calcolare una base del nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (2, 2, 2)$, $f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 2, 3)$. Stabilire se l'immagine di f copre l'intero codominio.

Sol. Risolvendo il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ otteniamo ∞^2 soluzioni del tipo $(s, t, -s-2t, 0)$. Ponendo ad es. $s = 1, t = 0$ e poi $s = 0, t = 1$ abbiamo una base. L'applicazione non è suriettiva perché la dimensione dell'immagine (2) non raggiunge quella del codominio.

4. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 0, 0, 1)$ sul sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (suggerimento: determinare una base di tale sottospazio, ecc.). Successivamente calcolare le coordinate del medesimo vettore rispetto alla base $\{(3, 2, 0, 0), (2, -3, 0, 0), (0, 0, 2, 4), (0, 0, -2, 1)\}$ (nota: è una base ortogonale).

Sol. $\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Le coordinate sono i coefficienti di Fourier; ad es. la prima è $\frac{(0,0,0,1)\times(3,2,0,0)}{(3,2,0,0)\times(3,2,0,0)} = 0$.

5. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la conica di equazione $7x^2 + 42xy + 47y^2 - 56 = 0$. Determinare le coordinate originali dei suoi fuochi.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{58}} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 - \frac{1}{28}Y^2 = 1$. $\frac{1}{\sqrt{58}} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{29} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

6. Calcolare tutti gli autovettori dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire se g è diagonalizzabile. Calcolare $g^{-1}(0, 9, 0)$ utilizzando la matrice inversa.

Sol. L'unico autovalore è $\lambda = 3$, a cui è associato l'autospazio $\{(t, 0, 0)\}$. Dunque non sussiste la diagonalizzabilità, per carenza di autovettori. Si ha poi: $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -5 \\ 0 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Sono dati i seguenti sottospazi S, T di $\mathbf{R}^4$, mediante equazioni cartesiane. $S : x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$; $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Calcolare le dimensioni di S, T e $S \cap T$. Utilizzando la formula di Grassmann, calcolare la dimensione di $S + T$.

Sol. $dim(S) = 4 - 1 = 3$, $dim(T) = 4 - 2 = 2$. Il sistema relativo all'intersezione consiste di 3 equazioni ed ha rango massimo (3), quindi $dim(S \cap T) = 4 - 3 = 1$. Segue che $dim(S + T) = 3 + 2 - 1 = 4$ (dunque i due sottospazi generano l'intero spazio $\mathbf{R}^4$, mediante le combinazioni lineari dei loro vettori).