Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

[**1**] Sulla retta $r : x+y-5z = x+y+z-6 = 0$ determinare i punti che formano i tre vertici di un triangolo di area $\frac{\sqrt{6}}{2}$ insieme all'origine e al punto $(1,1,1)$. Stabilire, successivamente, se r forma un angolo retto col piano $\pi : x-y=0$. Infine scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente r e l'origine.

Sol. : Esistono due punti idonei: $(2,3,1)$ e $(3,2,1)$. La retta è perpendicolare al piano (un suo vettore direttore è proporzionale al vettore normale (a,b,c)). Equazione del piano: $x+y-5z=0$.

[**2**] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $13x^2-6xy+5y^2=7$. Scrivere equazioni cartesiane delle direttrici (nel riferimento iniziale).

Sol. : Autovettori: $(3,-1)$ per $\lambda=14$, $(1,3)$ per $\lambda=4$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{4}} = 1 \ .$$

Le equazioni originali delle direttrici sono (utilizzando la legge inversa) $x+3y = \pm\frac{7}{\sqrt{2}}$.

[**3**] Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,1,2,2)$ rispetto al sottospazio $S : x_1-x_2+x_3-x_4 = x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$.

Sol. : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

[**4**] Verificare la validità della formula di Grassmann nel caso di due sottospazi coincidenti, $S=T$, di dimensione 3 in $\mathbf{R}^4$. Verificare poi la validità della formula di Grassmann nel caso di S e $S^\perp$.

Sol. : Nel primo caso abbiamo che $S+T = S\cap T = S = T$, quindi la formula diventa $3+3=3+3$. Nel secondo caso, poiché $dim(S^\perp)=1$ otteniamo $3+1=0+4$ (intersezione uguale allo zero e somma uguale all'intero spazio).

[**5**] Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x,y,z) = (x, 3x+2y+z, 6x+4y+2z)$. Determinare un vettore che non abbia controimmagine secondo f. Stabilire se esistono vettori che non hanno immagine secondo f.

Sol. : $\lambda = 0,1,4$ con rispettivi autovettori $(0,1,-2)$, $(-1,1,2)$, $(0,1,2)$. Non ha controimmagine qualunque vettore che aumenti il rango della matrice (ad es. in coordinate canoniche). Non possono esistere in alcun caso vettori che non hanno immagine!

[**6**] Nel piano euclideo, scrivere equazioni cartesiane delle due rette passanti per l'origine e formanti un angolo di 30° con la bisettrice del I e III quadrante.

Sol. : $y = (2\pm\sqrt{3})x$.

[**7**] Stabilire se l'insieme $\{\underline{v} \in \mathbf{R}^4 \colon \underline{v} \times (2,1,3,4) \geq 0\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (il simbolo $\times$ denota il prodotto scalare standard).

Sol. : Non si tratta di un sottospazio ad es. perché l'assioma dell'opposto non vale.