Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte, mediante procedimenti e calcoli chiari.
Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. In un riferimento cartesiano sono dati i punti $A = (1, 4, -1)$, $B = (2, 7, 3)$, $C = (6, 5, -3)$. Dimostrare che essi sono i vertici di un triangolo rettangolo. Esso è anche isoscele? Scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene il triangolo. Tra i punti della retta passante per A e B, determinare quelli distanti 10 da C.

Sol. Poiché $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$, abbiamo un angolo retto in A. Il triangolo non è isoscele perché $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Eq. del piano: $5x - 11y + 7z + 46 = 0$. Imponendo che il punto parametrico $(1 + t, 4 + 3t, -1 + 4t)$ sia distante 10 da C, otteniamo $t = \pm\sqrt{\frac{35}{13}}$.

2. Mediante una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica la parabola di equazione $3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$. Scrivere le coordinate originali del suo vertice.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow Y = -\frac{15}{8}X^2 - \frac{3}{4}X$. Sostituendo il nuovo vertice, $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{40}\right)$, otteniamo $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{7}{20}, -\frac{13}{40}\right)$.

3. Calcolare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$. Calcolare una base dell'immagine di f. Determinare un vettore che non abbia controimmagine.

Sol. $\lambda = 0 : (1, 0, -1)$; $\lambda = 1 : (0, 1, 0)$; $\lambda = 2 : (1, 0, 1)$. $Im(f) = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$. L'assenza di controimmagine è legata alla non risolubilità del relativo sistema, quindi il rango della matrice completa deve salire a 3 ad es. con la colonna $(1, 0, 0)$. (con più sintesi, è sufficiente che la prima componente sia diversa dalla terza.)

4. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $g(1, 1) = (6, 6)$ e $g(3, 1) = (1, 0)$. Calcolare $g(3, 2)$. Stabilire se $(1, 1)$ è un autovettore per g.

Sol. Poiché $(3, 2) = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(3, 1)$, in virtù della linearità di g abbiamo: $g(3, 2) = \frac{3}{2}g(1, 1) + \frac{1}{2}g(3, 1) = (\frac{19}{2}, 9)$. $(1, 1)$ è chiaramente un autovettore, dato che $g(1, 1) = 6(1, 1)$.

5. Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} 2x + y + 3w + 4z = 10 \\ 3x + y + w + 5z = 10 \\ 7x + 2y + 11z = 20 \end{cases}$.

Sol. A seguito di una riduzione a gradini otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi ∞^{4-2} soluzioni. Ponendo $w = s$ e $z = t$ otteniamo la soluzione generale, $(x, y, w, z) = (2s - t, -7s - 2t + 10, s, t)$.

6. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 0, 0, 1)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(1, 2, 0, 0), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 3), (0, 0, 2, 1)\rangle$.

Sol. I 4 vettori non costituiscono una base di S perché il rango della relativa matrice vale 3. Non possiamo eliminare il terzo vettore perché gli altri tre sono linearmente dipendenti. Eliminiamo quindi il secondo vettore. Ora occupiamoci dell'ortogonalità. Due dei restanti vettori sono già ortogonali – denotiamoli con $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$; occorre soltanto un passo dell'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, precisamente

$$\underline{w}_3 = (2, 1, 1, 3) - \frac{(2, 1, 1, 3) \times (1, 2, 0, 0)}{(1, 2, 0, 0) \times (1, 2, 0, 0)}(1, 2, 0, 0) - \frac{(2, 1, 1, 3) \times (0, 0, 2, 1)}{(0, 0, 2, 1) \times (0, 0, 2, 1)}(0, 0, 2, 1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1, 2\right).$$

Possiamo moltiplicare il risultato per 5, ottenendo un vettore $\underline{\tilde{w}_3}$ più facilmente gestibile: $(6, -3, -5, 10)$. Infine, la proiezione è data da

$$\frac{(0,0,0,1) \times \underline{w}_1}{\underline{w}_1 \times \underline{w}_1}\underline{w}_1 + \frac{(0,0,0,1) \times \underline{w}_2}{\underline{w}_2 \times \underline{w}_2}\underline{w}_2 + \frac{(0,0,0,1) \times \underline{\tilde{w}_3}}{\underline{\tilde{w}_3} \times \underline{\tilde{w}_3}}\underline{\tilde{w}_3} = \left(\frac{6}{17}, -\frac{3}{17}, \frac{9}{85}, \frac{67}{85}\right) \ .$$