**Corso di laurea in Medicina e Chirurgia HT**

Modulo di **Geometria differenziale**

***Diario delle lezioni (a.a. 2020 - 2021)***

**Lun. 01-03-2021 :**

Introduzione al modulo di geometria differenziale. La derivata è come un “microscopio” per analizzare le curve e le superfici con gli strumenti dell’algebra lineare. I vettori e le proprietà algebriche già collaudate per rette e piani possono essere così applicati anche a enti non “rettilinei” né “planari”.

Coniche. Dal punto di vista algebrico le coniche possono essere considerate come un primo passo al di là del mondo “lineare”. Ellisse (prerequisiti, anche su iperbole e parabola). Come arrivare all’equazione canonica partendo dalla definizione mediante i fuochi.

Ellisse traslata o ruotata: la relativa equazione polinomiale perde la forma canonica familiare. Come riconoscere un’ellisse a partire da un dato polinomio di secondo grado in due incognite? Matrice di ordine 2 relativa ai termini di secondo grado di un tale poli­nomio. Rotazione di un’ellisse mediante la diagonalizzazione della matrice appena defi­nita (da completare). Teorema spettrale e autovettori ortogonali.

**Lun. 08-03 :**

Conclusione della diagonalizzazione mediante la sostituzione delle nuove coordinate; la matrice trasposta che appare a sinistra del prodotto di tre matrici è in realtà anche l’inversa (in virtù del teorema spettrale gli autovettori sono ortogonali, ecc.) quindi essa riesce ad attivare la procedura di diagonalizzazione.

Una volta trovata la forma canonica dell’ellisse è possibile riportare indietro le coordinate di fuochi o vertici. Per scrivere invece l’equazione originale di una direttrice (o di un asintoto, nel caso di un’iperbole) occorre la trasformazione inversa, quella che dà le nuove coordinate in funzione delle vecchie.

Approfondimento sulle coniche (cenni): ellisse, parabola e iperbole rappresentano tutte la stessa “conica generale” se spostiamo il nostro punto di vista (includendo l’orizzonte nel piano di lavoro). La parabola funge da elemento separatore tra le due altre classi di coniche. Cenno al caso tridimensionale: un polinomio identifica ora una super­ficie; i “tipi” di superficie diventano 5 (un ellissoide, due parabolidi e due iperboloidi). Cenno alla curvatura in un dato punto di una superficie e al legame con gli autovalori della matrice relativa ai monomi di grado 2.

**Lun. 15-03 :**

Definizione di una conica mediante l’eccentricità. Rotazione di una parabola. Cenno alle traslazioni. Metodo del determinante invariante.

**Lun. 22-03 :**

Curve nel piano cartesiano. Esempi: retta, circonferenza, ellisse. Parametrizzazioni “istintive” e parametrizzazioni meno immediate ma più “scorrevoli” e comode. Derivate delle due singole componenti x(u) e y(u) . Vettore velocità. Ascissa curvilinea (parametrizzazione “nobile” e molto utile -- il modulo della relativa velocità vale costantemente 1 -- ma spesso difficile da costruire e analizzare). Schema di composizione di funzioni in presenza di due parame­trizzazioni.

In genere è possibile studiare molte proprietà dell’ascissa curvilinea relative alla curva in esame senza intervenire diretta­mente sull’ascissa curvilinea, ma sfruttando parametriz­zazioni più facili da gestire e utilizzando le classiche proprietà della derivata di funzioni com­poste). Curvatura e accelerazione centrifuga (primi cenni, con la formula della curvatura da approfondire).

**Lun. 29-03 :**

Formalizzazione di alcuni concetti basilari sulle curve: vettore tangente, vettore normale, curvatura. Esempi di curve parametrizzate: ellisse, circonferenza, parabola, spirale, cardioide. Vettore tangente **t** (supponiamo che abbia modulo costante, unitario, quindi supponiamo che il parametro *s* sia un’ascissa curvilinea). Il vettore **t** risulta essere ortogonale alla sua derivata (dimostrazione semplice, mediante la derivata del prodotto di funzioni). Il modulo di tale derivata è la cosiddetta “curvatura” *k*. La derivata di **t** esprime la variazione subita dalla direzione istantanea del movimento, quindi essa è l’*accelerazione*. Vettore normale **n**; in simboli, **t**’ = *k***n** . La curvatura misura l’accelerazione centrifuga. Più la curvatura è grande, più la curva è “stretta”.

Formula della curvatura nel caso bidime­nsionale (dimostreremo questa formula nel caso generale, tridimensionale). La formula della curvatura è comoda perché utilizza una parametrizzazione gene­rica (non è neces­saria l’ascissa curvilinea, la velocità è libera di variare anche in modulo), pertanto i calcoli delle derivate sono più agevoli.

**Lun. 12-04 :**

Gradiente lungo una curva e proprietà di perpendicolarità rispetto al vettore tangente. Un concetto importante nella geometria dello spazio: prodotto vettoriale. Formula per il calcolo di questo prodotto. Il prodotto vettoriale di due vettori proporzionali è il vettore nullo. Curve in dimensione 3 (introduzione). Analogia nel caso del vettore tangente e del vettore normale in dimensione 2. Dimostrazione della formula della curvatura (da completare).

**Lun. 19-04 :**

Fine della dimostrazione della formula per la curvatura. Curve nello spazio. Esempio dell’elica circolare. Triedro di Frenet e relative formule. Piano osculatore. Preparazione al nuovo argomento: superfici nello spazio.

**Lun. 26-04 :**

Parametrizzazioni P(u,v) di superfici nello spazio. Esempio della sfera. Curve nello spazio, pensate come curve nel piano Ouv trasportate sulla superficie tramite la parametriz­zazione. Vettore tangente di una curva sulla superficie. Calcolo del vettore tangente mediante le derivate parziali di P rispetto a u e v (in simboli, Pu , Pv ). Piano tangente in un dato punto della superficie.

**Lun. 03-05 :**

Lunghezza di un tratto di curva lungo una superficie. Numeri reali *E*, *F*, *G* associati a un dato punto sulla superficie e prima forma fondamentale. Vettore normale **N** in un punto della superficie (prodotto vettoriale di Pu e Pv , normalizzato). Curvatura di una curva idonea (il vettore normale della curva, **n**, deve essere diretto come **N**, altrimenti il valore della curvatura non esprime fedelmente la curvatura della superficie nella direzione in esame); formula per il suo calcolo, dipendente dal coefficiente angolare del vettore tangente nel riferimento Ouv; in particolare, la formula utilizza tre nuovi numeri reali *e*, *f*, *g*,otte­nuti dai prodotti scalari del vettore normale con le derivate parziali seconde di P).

**Lun. 10-05 :**

Approfondimenti sulla curvatura normale. Teorema di Meusnier. Studio di una super­ficie toroidale. Analisi della curvatura in un punto interno. Curvature massima e minima. Curvatura gaussiana e curvatura media.

**Lun. 17-05 :**

Curvature estreme (principali) come soluzioni di un’idonea equazione di secondo grado. Esse sono gli autovalori di una specifica matrice simmetrica. Punti iperbolici, punti ellittici. Cenno alle direzioni princi­pali fornite dagli autovettori. Superfici rigate: (studio di un iperboloide iper­bolico).

**Lun. 24-05 :**

Approfondimenti e preparazione al secondo esonero. Il toro non è una superficie rigata (cenno della dimostrazione mediante la costruzione di un’equazione cartesiana). Appro­fondimenti sulle schiere di rette in una superficie rigata. Cenno all’iperboloide ellit­tico e al cono asintotico. Conclusione del modulo.