[GEOMETRIA DIFFERENZIALE]

e approfondimenti di algebra lineare

appunti introduttivi

Corso di laurea: Medicina e Chirurgia HT

Sapienza Università di Roma

A.A. 2020-2021

Andrea Vietri

⟨ ultima modifica: 17 maggio 2021 ⟩

Capitolo 1

Le coniche.

1.1 Gli autovettori diradano la nebbia e compare un'ellisse!

Conosciamo già alcuni pregi degli autovettori nel semplificare una situazione inizialmente difficile da leggere. Vediamo ora gli autovettori all'opera in un contesto diverso: la rotazione di coniche.

In un riferimento Oxy consideriamo i punti (x, y) che soddisfano la legge

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9y^2 - 30 = 0 \quad .$$

Ad esempio, ponendo $x = 0$ troviamo $y = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$, quindi i punti

$$A = \left(0, \sqrt{\frac{10}{3}}\right) \quad , \quad B = \left(0, -\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$$

appartengono al luogo geometrico (probabilmente una "curva") formato da tutti i punti che soddisfano la legge data. Similmente troviamo

$$C = \left(\sqrt{\frac{30}{7}}, 0\right) \quad , \quad D = \left(-\sqrt{\frac{30}{7}}, 0\right) \quad .$$

Forse siamo condotti a immaginare che il luogo geometrico sia un'ellisse avente questi quattro punti come vertici. Se poi non vogliamo avere pregiudizi, siamo liberi di immaginare qualunque curva passante per i punti trovati. Sostituendo ad esempio $x = 1$, oppure $y = 1$, ecc., potremmo avere certamente più indizi sulla forma della curva. Esiste tuttavia un approccio più efficace; esso ci permetterà di scoprire che quel polinomio nasconde effettivamente un'ellisse, sì, ma ruotata di 30 gradi in senso antiorario.

Condivido l'opinione diffusa che la matematica è (ad esempio...) "l'arte di leggere lo stesso fenomeno in modi diversi". Leggiamo dunque il polinomio in un modo nuovo, illuminante, come il seguente prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 30 \ .$$

Mediante una base di autovettori (esercizio: calcolarla), diagonalizziamo la matrice centrale:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \ .$$

Analizziamo il significato della matrice situata appena prima del segno "=": essa ha per colonne gli autovettori ed esprime il cambiamento di riferimento

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Infatti, ad esempio, ponendo $X = 1$ e $Y = 0$ otteniamo $x = \sqrt{3}$ e $y = 1$. Queste ultime sono le coordinate del primo autovettore, $(\sqrt{3}, 1)$, scritte rispetto al riferimento iniziale; invece il nuovo riferimento "vede" l'autovettore come $(1, 0)$ perché tali sono appunto le sue nuove coordinate:

$$(\sqrt{3}, 1) = \mathbf{1}(\sqrt{3}, 1) + \mathbf{0}(-1, \sqrt{3}) .$$

In cosa consiste, geometricamente, il cambiamento di riferimento effettuato? Notiamo che gli autovettori sono *ortogonali*. Questa è una conseguenza del **teorema spettrale**: *Gli autovettori di una matrice simmetrica di ordine n sono n e possono essere scelti in modo tale da essere a due a due ortogonali.* La "scelta" entra in gioco soltanto quando abbiamo diversi autovettori linearmente indipendenti per un fissato autovalore; nel caso contrario, gli autovettori relativi ai distinti autovalori sono automaticamente ortogonali. Dunque i nuovi assi sono tra loro ortogonali, proprio come gli assi x e y originali. Oltretutto sono orientati nel modo corretto (l'asse X può ruotare verso l'asse Y — col percorso minimo — in senso antiorario). Il nuovo asse X forma col vecchio asse x un angolo θ di 30° perché

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3}, 1) \cdot (1, 0)}{\sqrt{3+1}\sqrt{1+0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(se non vogliamo utilizzare in alternativa un elementare ragionamento geometrico...). Osserviamo che il verso viene modificato se scambiamo le due colonne della matrice, oppure se cambiamo il segno a un solo autovettore, a piacere. Queste due opzioni corrispondono rispettivamente allo scambio degli assi o all'inversione della semiretta positiva per un solo asse.

Occorre tuttavia ritoccare il cambiamento di coordinate appena definito. Oltre alla rotazione, infatti, è presente una variazione di scala. Il riferimento viene ruotato ma anche rimpicciolito di 2. Questo 2 è infatti il modulo di ciascun autovettore. Insomma, dal punto di vista dei nuovi assi il mondo appare ristretto di 2 perché l'osservatore è cresciuto di 2. Per evitare di ingigantirci, basta normalizzare gli autovettori. Arriviamo così, finalmente, alla *rotazione*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Come si innesta la presente discussione sul problema relativo al polinomio iniziale? Il segreto è in un opportuno "copia e incolla"; occorre infatti sostituire il prodotto a destra del segno "=" al posto del vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Siamo a metà del lavoro; il polinomio comincia a cambiare veste, diventando un ibrido con variabili vecchie e nuove:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 30 .$$

Adesso arriviamo nel punto più delicato e interessante del tragitto: continuando con la sostituzione, al posto del vettore *riga* $(x\ y)$ scriviamo il medesimo prodotto ma *trasposto*. Sarebbe possibile dimostrare facilmente (esercizio interessante) che il trasposto del prodotto è uguale al prodotto delle trasposte: $(AB)^t = B^t A^t$. Nel nostro caso abbiamo quindi che

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

Montiamo ora questo nuovo pezzo nella formula in divenire, a sinistra, ottenendo

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} - 30 .$$

Sarebbe bello poter dire che stiamo diagonalizzando la matrice centrale... Scomparirebbero infatti i due termini esterni alla diagonale principale e il polinomio diventerebbe molto più semplice da leggere. Purtroppo non siamo autorizzati a dedurlo, perché il pezzo montato per ultimo non contiene la matrice *inversa*, bensì la *trasposta* (il problema della normalizzazione mediante il 2 invece non sussiste perché abbiamo comunque due idonei autovettori). È ridicolo pensare di poter diagonalizzare una matrice, in generale, chiudendola tra una certa matrice e la sua trasposta. Troppo facile!

Ricordiamo, tuttavia, che i due autovettori normalizzati sono *ortogonali*. Scatta allora una mirabile proprietà:

Nel contesto presente, la matrice trasposta è proprio uguale alla matrice inversa.

Dimostrare questa proprietà non è difficile: se siamo in presenza di una matrice A di ordine n le cui colonne sono versori a due a due ortogonali, occorre verificare (esercizio sul prodotto scalare) che

$$A^T A = I_n .$$

Tornando al polinomio ormai completamente modificato, a questo punto possiamo affermare con certezza che il processo di cambiamento delle variabili è stato, di fatto, una vera e propria diagonalizzazione, perché la matrice trasposta utilizzata per semplice simmetria si è rivelata essere la matrice inversa. Siamo quindi certi che

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} = 6X^2 + 10Y^2 .$$

Aggiungendo il termine noto 30 arriviamo alla forma canonica

$$\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{3} = 1 .$$

Esercizio

Ripetere la stessa procedura con l'equazione $9x^2 - 2xy + 9y^2 - 40 = 0$. (In questo caso l'angolo sarà 45°.)

Esercizio

(Classroom, compito)
Provare con l'equazione $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$. Ora si tratta di un'iperbole...

1.2 Lavoriamo in comodità e poi torniamo al vecchio riferimento.

Una adeguata rotazione, come quella appena vista, ci consente di studiare la conica in un ambiente privilegiato, utilizzando strumenti che non potrebbero affatto essere applicati ad una equazione generale. Ad esempio possiamo calcolare i fuochi dell'ellisse studiata precedentemente. Dalla formula $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ otteniamo i punti $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$. Attenzione, però. Questi fuochi vivono nel mondo delle favole, perché i *veri* fuochi devono essere espressi nelle coordinate originali. Come trovare queste ultime coordinate? Semplicemente dobbiamo prendere un dizionario e tradurre da una lingua a un'altra. Il nostro dizionario è già disponibile: è proprio la legge del cambiamento di coordinate che abbiamo costruito per trasformare l'equazione. Inserendo le nuove coordinate nella legge, il dizionario ci dà le coordinate tradotte nel vecchio riferimento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} .$$

Ora la situazione si complica... Come fare per riportare nelle vecchie coordinate l'equazione di una direttrice? Una di queste due rette è descritta dalla legge

$$X = \frac{a^2}{c} \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{5}{\sqrt{2}} .$$

Purtroppo non possiamo inserire le coordinate di *un preciso punto* nella formula precedente; infatti la direttrice è un *insieme di punti*; essa è il *luogo geometrico* di tutti i punti (X, Y) che soddisfano la legge $X = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Per tornare alle coordinate originali (x, y) potremmo pazientemente annotare tutti i punti della direttrice (pazienza infinita...) e ad uno ad uno dovremmo tradurli. Una salvifica scorciatoia è certamente quella di scriverli in forma parametrica per poi applicare la formula:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{t}{2} \\ \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

Successivamente dovremmo assorbire la t così da ottenere un'equazione cartesiana in x e y (esercizio). Ma esiste una strada molto più diretta e scorrevole. Ispiriamoci alla solita analogia con la traduzione linguistica. Intanto, teniamo presente che per tradurre *gatto* in inglese basta inserire questa stringa in un traduttore automatico oppure ricorrere al dizionario italiano-inglese. Possiamo quindi affermare che "un'opportuna trasformazione modifica *gatto* in *cat*" (similmente possiamo tradurre le coordinate dei due fuochi, da nuove a vecchie). Ma ad esempio come possiamo far capire a una persona inglese il concetto di "parole formate da 5 lettere in italiano"? Qual è la frase con cui un inglese riesce a descrivere un tale insieme? Attenzione, non abbiano una o poche più parole da tradurre! Ovviamente la risposta non consiste delle parole di 5 lettere in inglese. D'altra parte, sarebbe faticoso e poco pratico elencare tutte le traduzioni di parole di 5 lettere, tra cui figura anche *cat*. Non sembra esserci una regola elementare che descriva in inglese questo insieme così naturale in italiano. L'unico modo efficace per identificare correttamente questo insieme, una volta attraversata La Manica, è dire...

... *the set of words which,* **translated into Italian**, *give a word whose length is* 5.

L'aspetto logico curioso di questa frase è la presenza del **traduttore inverso**, da inglese a italiano, nonostante lo scopo sia quello di tradurre l'intero concetto da italiano a inglese.

Torniamo alla direttrice, supportati da questa recente esperienza. Nel riferimento iniziale, vecchio, possiamo dire che la direttrice è il luogo dei punti (x, y) che, *una volta tradotti nel nuovo riferimento come coordinate* (X, Y), soddisfano la legge in vigore nel nuovo riferimento. Questa legge recita così:

La prima coordinata, cioè la X*, deve essere uguale a* $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Preso quindi un punto generico (x, y) nel vecchio riferimento, intanto traduciamolo con la legge inversa,

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

(ricordiamo, fra l'altro, che l'inversa è uguale alla trasposta). In dettaglio, abbiamo che

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \\ Y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} .$$

Emerge quindi che la nuova, prima coordinata X del punto originale (x, y) è espressa in funzione di x e y come $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$. In questa occasione possiamo trascurare la nuova coordinata Y perché essa non è menzionata nella legge che definisce la direttrice, ma ad esempio gli asintoti di un'iperbole richiederebbero entrambe le incognite. Otteniamo:

$$\left[\textit{ nuova prima coordinata } = \frac{5}{\sqrt{2}} \right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{\sqrt{2}} \right]$$

o più semplicemente

$$x\sqrt{3} + y - 5\sqrt{2} = 0 \ .$$

$\boxed{\text{Esercizio}}$

(Classroom, compito)

Scrivere le equazioni originali (cioè nelle coordinate vecchie, iniziali) degli asintoti dell'iperbole la cui equazione $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$ è stata studiata in un precedente esercizio.

1.3 La parabola: una transizione quasi impercettibile.

Le coniche possono essere definite mediante i due fuochi (ellisse e iperbole) o mediante fuoco e direttrice (parabola), ma è possibile dimostrare che esse vengono ottenute anche secando con un piano un cono infinito a due falde. Esiste infine una definizione di ellisse e iperbole che coinvolge il fuoco e la direttrice, come per la parabola. Questo e altri importanti aspetti sulle coniche erano ben noti già agli studiosi greci — ad es. Euclide, Menecmo, Apollonio — circa 2300 anni fa.

Nel caso del cono a due falde, l'inclinazione del taglio è fondamentale. Se tagliamo solo una falda, otteniamo un'ellisse. Se modifichiamo l'inclinazione e tagliamo entrambe le falde, otteniamo un'iperbole. In quale caso otteniamo una parabola? La frase sul taglio dell'unica falda è in realtà imprecisa. Se col taglio otteniamo una curva *chiusa* (in moltissimi casi), essa è un'ellisse, ma se siamo così precisi da tagliare la falda parallelamente alla generatrice opposta al punto d'ingresso del taglio (vertice), e perpendicolarmente al piano di simmetria del cono contenente il vertice e il centro, ecco che la curva non si chiude più nel vertice opposto, invece prosegue all'infinito e... abbiamo ottenuto una parabola. Se sbagliamo anche soltanto di pochissimo, generiamo un'ellisse o un'iperbole.

Il carattere delicatamente transitorio della parabola è ben evidente anche nella struttura della matrice di ordine 2 relativa ai monomi di secondo grado. Uno dei due autovalori infatti è uguale a zero. Assistiamo di nuovo a una transizione: il segno dell'autovalore determina il tipo di conica a centro (ellisse o iperbole) e per passare da un tipo all'altro occorre attraversare un momento "parabolico".

Torniamo ai calcoli standard. Vediamo un esempio di rotazione per una parabola, col polinomio

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - x\sqrt{10} - 2 = 0 \ .$$

La presenza dello strano monomio con la radice verrà chiarita verso la fine della riione. Intanto diagonalizziamo la matrice dei termini di secondo grado:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 0 \ , \ \lambda = 10 \ .$$

I rispettivi autospazi sono $\{(3t, t)\}$ e $\{(t, -3t)\}$. L'autovalore nullo ci avverte che al termine della diagonalizzazione troveremo *soltanto uno* dei due monomi quadratici. Le possibilità sono $10X^2 + 0Y^2$ oppure $0X^2 + 10Y^2$ e dipendono dall'ordine delle colonne nella matrice diagonalizzante. Se vogliamo mantenere la X^2 dobbiamo porre nella prima colonna il versore $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Abbiamo:

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 10X^2 + 0Y^2 = 10X^2 \ .$$

Ora, se non avessimo il monomio aggiuntivo $-x\sqrt{10}$ otterremmo la curva di equazione

$$10X^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 = \frac{1}{5}$$

che non rappresenta in realtà una conica "curva". Abbiamo trovato infatti due rette parallele, con equazioni

$$X = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}\ .$$

Esse possono essere interpretate come una parabola “degenere” col vertice spostato all’infinito. Il vertice è così lontano che ci sembra di vedere due rette anziché il disegno curvo di una parabola pur lunghissima. Per avere invece una parabola non degenere è provvidenziale il monomio di primo grado. Purtroppo dobbiamo sostituire “manualmente” la x di tale monomio, mediante la legge

$$x = \frac{X}{\sqrt{10}} + \frac{3Y}{\sqrt{10}}$$

perché la diagonalizzazione coinvolge soltanto i termini di secondo grado e non copre i monomi di grado 1. Sostituendo quindi nell’equazione ibrida, abbiamo:

$$10X^2 - x\sqrt{10} - 2 = 0 \ \Rightarrow \ 10X^2 - \sqrt{10}\left(\frac{X}{\sqrt{10}} + \frac{3Y}{\sqrt{10}}\right) - 2 = 0 \ \Rightarrow \ 10X^2 - X - 3Y - 2 = 0$$

e in conclusione

$$Y = \frac{10}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\ .$$

Da questo punto in poi, la trattazione è simile a quella per ellissi e iperboli.

Esercizio

Determinare il fuoco della parabola di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 2 = 0$.

Sol.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ Y = -\frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

Inserendo le coordinate nuove del fuoco otteniamo le coordinate originali (x_F, y_F):

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}\ .$$

1.4 Le roto-traslazioni e il determinante invariante.

Oltre alle rotazioni, le *traslazioni* del riferimento riescono a semplificare ulteriormente il polinomio iniziale. La traslazione che porta l’origine O nel punto $\tilde{O} = (p, q)$ è definita dalle leggi

$$x = \tilde{X} + p \quad , \quad y = \tilde{Y} + q\ .$$

Infatti il vettore generico $\overrightarrow{OP}$, con $P = (x, y)$, può essere decomposto come $\overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}P}$. Otteniamo quindi l’identità

$$(x, y) = (p, q) + (\tilde{X}, \tilde{Y})\ ,$$

da cui seguono le due singole leggi della traslazione.

Mediante un'idonea traslazione è possibile eliminare i monomi di primo grado che sono sopravvissuti alla rotazione (infatti quest'ultima elimina solo il monomio xy) e che quindi costituiscono ancora un ostacolo alla chiara visione della forma canonica. Pur non entrando nei dettagli sul calcolo delle traslazioni (come trovare la giusta traslazione? ecc.), possiamo sempre utilizzare il linguaggio delle matrici per codificare una rotazione e la successiva traslazione incorporandole in un'unica matrice di ordine 3 (dunque non 2), traendo infine alcune conclusioni importanti.

Partiamo dal cambiamento di coordinate generale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

che possiamo pensare come la composizione di una rotazione e una traslazione:

$$(1): \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad ; \quad (2): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} .$$

Compattiamo ora le due operazioni in un prodotto di matrici in cui il vettore $(x, y, 1)$ contiene una coda (l'uno) che agisce come un enzima (metafora forse azzardata?)... Esso non ha alcuna interpretazione geometrica e il suo ruolo è "soltanto" quello di formalizzare elegantemente il processo, *attivando e favorendo* lo sviluppo dei calcoli così da descrivere efficacemente la composizione di rotazione e traslazione. Lo stesso discorso vale per l'uno di $(X, Y, 1)$ e per 'intera terza riga della matrice quadrata che segue. Disponiamo insomma di una sorta di tutori, di protesi che sostengono il calcolo vero e proprio.

Abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Una volta effettuato il prodotto, possiamo ringraziare i tutori e dimenticarcene. Ora però avviene qualcosa che va oltre la semplice comodità di rappresentare sinteticamente i due processi fusi insieme. Avviene un profondo fenomeno algebrico. Potenziando il precedente metodo di diagonalizzazione, possiamo infatti descrivere in un colpo solo la riduzione di una conica in forma canonica mediante rotazione e traslazione. Se prima chiudevamo la matrice tra due idonee matrici di ordine 2, ora occorre al centro una matrice di ordine 3. Tuttavia essa è facilmente realizzabile, arricchendo la costruzione già vista per i monomi di grado 2. Se ad esempio abbiamo l'equazione di un'ellisse,

$$x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

(notiamo che il determinante della matrice di ordine 2 è infatti positivo), col solito sostegno degli "uno" e con la consueta tecnica di dimezzamento dell'informazione per alcuni monomi, possiamo ottenere il nostro polinomio come

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

È chiaro, a questo punto, che la roto-traslazione trasforma il polinomio iniziale nel nuovo (anzi, super-nuovo, visto che è stato rinnovato *due* volte) polinomio

$$\begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

e se la roto-traslazione è stata eseguita a regola d'arte possiamo essere certi che otterremo la forma canonica di un'ellisse:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ .$$

In realtà, ciò che otteniamo inizialmente è una versione grezza della forma canonica. Sappiamo infatti che i due autovalori diventano i coefficienti delle nuove variabili. Sappiamo, poi, che tutti gli altri monomi ad eccezione del termine noto sono scomparsi. Ora, sarebbe un errore decidere che il termine noto vale 1. Sarebbe similmente sbagliato lasciare il termine noto uguale a -3, perché non possiamo prevedere a tavolino gli effetti della *traslazione*. Tutto ciò che possiamo dire è che la forma grezza sarà

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = H \ ,$$

ma quanto vale questo numero H? Qui entra in gioco l'*invarianza del determinante*. Se applichiamo il teorema di Binet al prodotto di matrici appena visto, tenendo presente che le matrici laterali hanno determinante unitario, concludiamo che il nuovo determinante sarà proprio uguale al vecchio determinante. In simboli,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -H \end{vmatrix} \ .$$

Ecco dunque che il valore di H discende da una semplice equazione. In questo esempio specifico,

$$H = \frac{41}{\lambda_1 \lambda_2} \ .$$

Un discorso analogo vale per l'iperbole. La forma grezza della parabola, invece, può essere espressa preferibilmente come

$$\lambda X^2 + 0Y^2 = 2KY \ ,$$

così da poter creare un'equazione agevole,

$$det(M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K \\ 0 & -K & 0 \end{vmatrix} \ ,$$

per trovare infine

$$K = \pm\sqrt{\frac{det(M)}{-\lambda}} \ .$$

La scelta del segno è libera: esistono roto-traslazioni che portano la parabola ad avere concavità positiva, a differenza di altre, ma sempre nel rispetto del teorema di Binet.

Attenzione! Se calcoliamo un fuoco con questo secondo metodo, poi non possiamo riportarlo indietro. Il metodo del determinante invariante fornisce l'effetto *ma non la causa*. Il metodo degli autovettori invece consente di ripercorrere a ritroso il tragitto. La scelta di uno dei due metodi dipende quindi dal nostro obiettivo. Se siamo interessati soltanto alla forma della conica, va benissimo il metodo dell'invariante.

Capitolo 2

Geometria differenziale delle curve.

2.1 La derivata... non distingue una retta da un'ellisse.

Nel piano Oxy, un'equazione cartesiana come $3x - 2y + 4 = 0$ rappresenta fotograficamente una retta, ma se vogliamo percorrere questo luogo geometrico nel tempo, occorre la forma parametrica, ad esempio

$$x = t \quad , \quad y = \frac{3}{2}t + 2 \ .$$

Analogamente, un'ellisse come quella descritta dall'equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

può essere percorsa mediante un punto mobile scegliendo $x = t$ e calcolando

$$y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \ .$$

Nel caso dell'ellisse il tempo è limitato dall'intervallo $[-2, 2]$ e oltretutto se partiamo dall'istante $t = -2$ il nostro percorso consiste di due sotto-percorsi simultanei: ci muoviamo lungo l'arco nel II e I quadrante (un po' come il percorso del sole durante il giorno) ma anche lungo quello "sotterraneo", nel III e IV quadrante, fino a ricongiungerci nell'istante $t = 2$, nel punto $(2, 0)$.

La radice quadrata esprime lo sforzo che facciamo nel passare dalla forma implicita, elegante e compatta, a quella parametrica non del tutto "fluida", sia esteticamente che computazionalmente. Esiste in effetti un modo più naturale per descrivere il nostro cammino lungo l'ellisse:

$$x = 2\cos u \quad , \quad y = 3\sin u \ .$$

Per verificare la correttezza di questa nuova forma parametrica, sostituiamola nell'equazione cartesiana:

$$\frac{(2\cos u)^2}{4} + \frac{(3\sin u)^2}{9} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 \ .$$

Il segreto di questa notevole semplificazione è la dipendenza non banale di *entrambe* le variabili x, y dal parametro u. Prima infatti la scelta di $x = t$ causava uno sbilanciamento importante, cosa che invece non era avvenuta nel caso della retta; o meglio, nel caso della retta era sorto il denominatore, qui invece compare la radice quadrata. Un vantaggio della nuova parametrizzazione con la u è la possibilità di fare un giro completo, antiorario, dell'ellisse partendo dall'istante $u = 0$ e terminando nell'istante $u = 2\pi$.

Anche per la retta esiste una parametrizzazione più semplice, ad esempio (verificare)

$$x = 2u \quad , \quad y = 3u + 2 \ .$$

Con la scelta di u la nostra velocità di percorrenza raddoppia perché vale la relazione $t = 2u$. Nel caso dell'ellisse, invece, la velocità subisce una modifica più profonda, dato che il tempo viene distorto secondo la legge $t = 2\cos u$, o viceversa $u = \arccos \frac{t}{2}$.

Le parametrizzazioni possono essere formalizzate come *funzioni* da un intervallo $J \subseteq \mathbf{R}$ (eventualmente l'intero insieme $\mathbf{R}$) al piano coordinato Oxy inteso come $\mathbf{R}^2$. Nel caso della retta in esame abbiamo la funzione

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \quad : \quad f(u) = (2u, 3u + 2) \ .$$

Invece la funzione g relativa all'ellisse è

$$g : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2 \quad : \quad g(u) = (2\cos u, 3\sin u) \ .$$

Potremmo allargare l'intervallo J dell'ellisse consentendo più giri, o giri parziali aggiuntivi. Il minimo richiesto è comunque un intervallo ampio 2π.

Queste funzioni appena definite possono essere pensate come una coesistenza di due sotto-funzioni da J a $\mathbf{R}$:

$$f(u) = (\, x(u) \, , \, y(u) \,) \ .$$

I simboli x e y non sono casuali: essi ci ricordano che le due sotto-funzioni sono proprio le coordinate x, y che ora variano *in funzione* di un parametro u.

Più in dettaglio, ora, mentre camminiamo lungo la retta $(2u, 3u + 2)$, possiamo capire a che velocità andiamo? Sappiamo che questa è il doppio della velocità che avremmo nella modalità $(t, \frac{3}{2}t + 2)$. Dove è nascosto il dato della velocità? Il termine noto non sembra avere alcun ruolo; infatti l'informazione è contenuta nei coefficienti della t o della u (traslando il nostro cammino, andremmo sempre alla stessa velocità). Concentriamoci dunque sulla giacitura $(2u, 3u)$. Inizialmente aiutiamoci con un esempio su una retta diversa, l'asse x, parametrizzata come $(2u, 0)$. Possiamo trascurare la y, deducendo che la velocità è la *derivata* $\frac{d}{du}(x(u)) = 2$. Se ora torniamo alla retta descritta dal punto mobile $P(u) = (2u, 3u)$, possiamo calcolare le derivate per entrambi gli assi cartesiani e otterremo una *derivata vettoriale* che è la giusta combinazione dei due singoli contributi; infatti l'incremento infinitesimo totale è la somma vettoriale degli incrementi lungo gli assi cartesiani. Abbiamo quindi:

$$\frac{d}{du}(2u, 3u) = \left(\frac{d}{du}(x(u)), \frac{d}{du}(y(u)) \right) = (2, 3) \ .$$

Il vettore $\overrightarrow{v} = (2, 3)$ è una freccia diretta come la retta r; il suo modulo, $\sqrt{13}$, registra la velocità di percorrenza. Siamo in presenza del cosiddetto *vettore tangente*.

Possiamo ovviamente aggiungere i termini costanti $(0, 2)$, ottenendo lo stesso risultato:

$$\frac{d}{du}(2u, 3u + 2) = (2, 3) \ .$$

In termini più analitici, ciò che stiamo calcolando è il limite di un *rapporto incrementale*. In tale rapporto, il numeratore consiste del vettore applicato in un fissato punto $f(u)$ e con la punta della freccia corrispondente a un secondo punto della curva, $f(u+h)$, che tende a $f(u)$; il denominatore è l'incremento h. All'avvicinarsi dei due punti, il vettore tende a diventare un *vettore direttore della retta tangente* nel punto fissato (si tratta del limite di una successione di rette *secanti*). Ragionando ora su componenti separate, otteniamo le due singole derivate:

$$\frac{df}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{x(u+h) - x(u)}{h}, \frac{y(u+h) - y(u)}{h} \right) =$$
$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{x(u+h) - x(u)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y(u+h) - y(u)}{h} \right) = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du} \right) \ .$$

Naturalmente possiamo permetterci di lavorare con le derivate perché abbiamo tacitamente supposto che le funzioni $x(u)$ e $y(u)$ siano appunto derivabili.

Poiché le derivate non si accorgono dello scenario globale, assorte come sono nello studiare il movimento *al microscopio*, punto per punto, esse ci consentono di studiare l'ellisse *localmente* come se fosse una retta. Nel caso dell'ellisse, tuttavia, la derivata è

$$\overrightarrow{v}(u) = \frac{d}{du}(P(u)) = \frac{dP}{du} = \frac{d}{du}(2\cos u, 3\sin u) = (-2\sin u, 3\cos u) \ .$$

La notazione $\overrightarrow{v}(u)$ sottolinea la dipendenza di $\overrightarrow{v}$ dal medesimo parametro che muove il punto $P(u)$: il vettore velocità cambia continuamente. Ad esempio, nell'istante iniziale $u = 0$ abbiamo $\overrightarrow{v}(0) = (0, 3)$ perché stiamo procedendo (per un tragitto infinitesimo) in verticale a velocità 3. Invece, per $u = \frac{\pi}{6}$ la direzione è cambiata e la velocità è

$$\frac{d}{du}(2\cos u, 3\sin u)\Big|_{u=\frac{\pi}{6}} = \left(-1, \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) \ .$$

In particolare, il modulo vale $\frac{\sqrt{31}}{2}$; esso sta diminuendo e arriverà a 2 nel punto più alto (il vertice superiore), corrispondente a $u = \frac{\pi}{2}$: qui infatti il vettore velocità è $(-2, 0)$.

Esercizio

Verificare che il vettore velocità lungo la circonferenza

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2 \quad : \quad f(u) = (7\cos u + 4, 7\sin u - 9)$$

è costante in modulo (vale 7), mentre la sua direzione varia nel modo prevedibile. Scrivere poi l'equazione cartesiana canonica di tale circonferenza e verificare che essa è soddisfatta dalla forma parametrica.

2.2 Quando la strada curva troppo... la curvatura è marcata!

Muovendosi lungo alcuni tratti dell'ellisse percepiamo una maggiore forza centrifuga rispetto ad altri punti. Percorrendo in bicicletta questi tratti con forza centrifuga marcata siamo condotti a inclinare la bici verso la strada, dalla parte interna della curva, così da equilibrare la spinta esterna. In quali punti questa forza è massima? Più in generale, come varia questa forza lungo l'ellisse? Attenzione, però: dobbiamo ipotizzare che il tachimetro — se montato sulla bici — segni *sempre la stessa velocità* (valore scalare), altrimenti la misurazione della forza centrifuga non sarebbe equa per tutti i punti!

Supponiamo quindi che la nostra velocità sia costante in modulo, anzi, per semplicità supponiamo che valga sempre 1. Per distinguere questo caso da tutti gli altri, cambiamo il nome al parametro; denotiamolo con s. Abbiamo quindi:

$$\left|\left|\frac{dP}{ds}\right|\right| = 1 \quad .$$

Notiamo oltretutto che

$$\frac{dP}{du} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{du} \;\Rightarrow\; \left|\left|\frac{dP}{du}\right|\right| = \frac{ds}{du}$$

(possiamo supporre s crescente, come funzione di u).

Il vettore velocità $\frac{dP}{ds}$ (in effetti un versore) acquista un ruolo molto importante in questo contesto specifico; denotiamo tale vettore tangente con $\mathbf{t}$. Possiamo intanto scrivere in modo più espressivo che

$$\frac{dP}{du} = \mathbf{t}\frac{ds}{du} \; .$$

Ora, al variare di s varia soltanto la direzione e non il modulo di $\mathbf{t}$. La nostra percezione spaziale della forza centrifuga è strettamente connessa alla *variazione* di $\mathbf{t}$. Se calcoliamo infatti

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

otteniamo un vettore *ortogonale* a $\mathbf{t}$. Per dimostrarlo, partiamo dalla relazione

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$$

ed effettuiamo la derivata da entrambe le parti; otteniamo

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d}{ds}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}) = \frac{d}{ds}(\mathbf{t})\cdot\mathbf{t} + \mathbf{t}\cdot\frac{d}{ds}(\mathbf{t}) = 2\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{t}\right) \; .$$

(il terzo "=" segue dalle proprietà della derivata applicate al prodotto scalare — verificare).

Il modulo del vettore $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ è il diretto responsabile della spinta centrifuga che percepiamo. Si tratta della "curvatura", k, nel punto $P(s)$. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} \; ,$$

dove $\mathbf{n}$ ha la stessa direzione di $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ e viene definito come il *vettore normale* alla curva nel punto $P(s)$. Esso nasce, semplicemente, dalla normalizzazione di $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$; il fattore di normalizzazione è proprio la curvatura. Ricordando la definizione di $\mathbf{t}$ possiamo anche scrivere

$$\frac{d^2P}{ds^2} = k\mathbf{n} \; .$$

Siamo così arrivati alla formula della curvatura:

$$k = \frac{\left|\left|\frac{dP}{du} \times \frac{d^2P}{du^2}\right|\right|}{\left|\left|\frac{dP}{du}\right|\right|^3} \; ,$$

dove il simbolo $\times$ denota il *prodotto vettoriale* (attenzione a non confonderlo col simbolo del prodotto cartesiano). Si tratta del vettore perpendicolare a due dati vettori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ col verso disposto in modo che dalla punta del prodotto vettoriale si veda ruotare $\overrightarrow{p}$ verso $\overrightarrow{q}$ (col tragitto minimo) in modo antiorario. Il modulo del prodotto vettoriale è definito come $||\overrightarrow{p}|| \cdot ||\overrightarrow{q}|| \cdot \sin\theta$, dove θ è l'angolo formato dai due vettori iniziali. Scrivendo $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ come (p_1, p_2, p_3) e (q_1, q_2, q_3), è possibile dimostrare con un po' di lavoro (teorema notevole!) che

$$\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Attenzione: in un contesto bidimensionale, per attivare il prodotto vettoriale occorre immergere i vettori nello spazio, aggiungendo la terza coordinata $z = 0$. Il prodotto vettoriale si riduce così al semplice *determinante* della matrice che ha i due vettori come righe (è la terza componente nella formula appena vista).

La definizione geometrica che utilizza il seno dell'angolo ci consente di dedurre che due vettori perpendicolari danno luogo a un prodotto vettoriale il cui modulo è il prodotto dei due moduli iniziali, ed è il massimo al variare dell'angolo, mentre al contrario, due vettori paralleli hanno prodotto vettoriale nullo.

Torniamo alla formula della curvatura. Per dimostrarla calcoliamo la derivata seconda di $P(u)$ pensando a $P(u)$ come *composizione* $P(s(u))$. Insomma, anziché percorrere una strada dal luogo L al luogo M, passiamo per la sosta S e interpretiamo il cammino come composizione di due tratti (già in precedenza avevamo incontrato la composizione). In questo modo, utilizzando le proprietà della derivazione composta emergeranno lentamente i dati che ci interessano. Infine utilizzeremo il prodotto vettoriale per selezionare l'informazione utile, separandola da quella superflua. Vediamo:

$$\frac{d^2P}{du} = \frac{d}{du}\frac{dP}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{dP}{ds}\frac{ds}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\mathbf{t}\frac{ds}{du}\right) = \frac{d\mathbf{t}}{du}\frac{ds}{du} + \mathbf{t}\frac{d^2s}{du} =$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{du}\right)\frac{ds}{du} + \mathbf{t}\frac{d^2s}{du} = k\mathbf{n}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \mathbf{t}\frac{d^2s}{du} .$$

Ora, bombardando quest'ultima somma di vettori col prodotto vettoriale rispetto a $\frac{dP}{du}$ possiamo mettere in luce il vettore normale $\mathbf{n}$ e al tempo stesso facciamo evaporare l'informazione tangenziale relativa a $\mathbf{t}$. Infatti, tenendo presente l'ortogonalità tra $\mathbf{n}$ e $\frac{dP}{du}$, abbiamo:

$$\frac{dP}{du} \times \left(k\mathbf{n}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \mathbf{t}\frac{d^2s}{du}\right) = \frac{dP}{du} \times k\mathbf{n}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \frac{dP}{du} \times \mathbf{t}\frac{d^2s}{du} =$$

$$= \frac{dP}{du} \times k\mathbf{n}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \mathbf{t}\frac{ds}{du} \times k\mathbf{n}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = k\left(\frac{ds}{du}\right)^3 \mathbf{t} \times \mathbf{n} .$$

Sempre in virtù delle proprietà del prodotto vettoriale, il vettore $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ risulta essere un versore (gioca il ruolo del versore dell'asse z rispetto agli altri due assi definiti da $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$). Si tratta del cosiddetto *vettore binormale* $\mathbf{b}$. Ciò che conta — arrivati a questo punto dopo un lungo treno di uguaglianze — è che il modulo del vettore iniziale $\frac{d^2P}{du}$ coincide col modulo del vettore finale, e che quest'ultimo è uguale a $k\left(\frac{ds}{du}\right)^3$. In particolare, la curvatura può essere ottenuta dividendo tale modulo per $\left(\frac{ds}{du}\right)^3$.

$\boxed{\text{Esercizio}}$

Data la parabola descritta dalla parametrizzazione $f(u) = (u, u^2)$, dimostrare che la curvatura massima in questa curva è raggiunta nel vertice e vale 2. Studiare la funzione curvatura dimostrando in particolare che essa tende a zero allontanandosi sempre più dal vertice.

Scrivere successivamente l'equazione del cosiddetto *cerchio osculatore* relativo al vertice. Si tratta della circonferenza il cui centro è situato sulla retta normale, con raggio uguale all'inverso della curvatura (in questo caso, 1/2). Sarebbe possibile dimostrare che esso è il miglior cerchio che "approssima" la parabola nel vertice (verificare: il relativo sistema porta a 4 soluzioni coincidenti).

Esercizio

Data la spirale descritta dalla legge $\sigma(u) = (u \cos u, u \sin u)$, con $u \geq 0$, calcolare il vettore tangente $\mathbf{t}$ e il normale $\mathbf{n}$ nei punti $\sigma(\pi/2)$, $\sigma(\pi)$ e $\sigma(2\pi)$. Calcolare poi la curvatura generica, al variare di u.

2.3 Il gradiente e il dissidio tra implicito ed esplicito.

L'equazione implicita di una retta nel piano Oxy è (lo sappiamo) $ax+by+c=0$. Essa descrive una retta mantenendo il segreto della direzione e celando anche altri dati. Per sviscerare la direzione di questa retta dobbiamo calcolare il vettore $(-b, a)$. Per trovarne la quota dobbiamo spremere qualche neurone in più, e procacciarci il quoziente $-\frac{c}{b}$. Perché tanta fatica? Non è meglio una comoda forma parametrica $x = ht + p$, $y = kt + q$?

Sappiamo, tuttavia, che esistono pro e contro. Le equazioni implicite, cartesiane, possono unirsi e formare *sistemi* che poi confluiscono nel reame delle matrici. Ma c'è di più. La forma cartesiana nasconde, è vero, le informazioni più naturali, ma mette in luce con estrema immediatezza l'informazione *antagonista* della direzione: il vettore perpendicolare (a, b). Questo discorso è ancora più evidente con i piani in un riferimento spaziale $Oxyz$, ma restiamo nella geometria piana. Insomma, le equazioni implicite ci comunicano il contrario dell'informazione naturale, ma grazie a questo contrario possiamo arrivare facilmente a scoprire l'informazione che vogliamo. Il prodotto scalare è il canale di trasmissione.

Qualcosa di simile, ma in uno scenario più generale, accade con le curve. La "generalizzazione" del vettore normale (a, b) è fornita dal *gradiente* di una funzione. Data ad es. la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+4y+1=0$, dunque $f(x,y)=0$, possiamo effettuare le due derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 \ ,$$

definendo il "gradiente" di f nel punto (x, y) come

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 2y + 4) \ .$$

Notiamo che nel caso della retta il gradiente si riduce proprio ad (a, b), vettore perpendicolare. Invece nel caso della circonferenza i due valori di a e b variano secondo le rispettive leggi $2x - 2$ e $2y + 4$, ma ancora una volta descrivono l'informazione antagonista al vettore tangente: la direzione normale. Per vederlo, costruiamo le equazioni parametriche. Dall'equazione cartesiana possiamo estrarre il centro $(1, -2)$ e il raggio $\sqrt{1+4-1} = 2$. Otteniamo così le equazioni

$$P(u) = (\, x(u)\, , \, y(u)\,) = (1 + 2\cos u, -2 + 2\sin u) \ .$$

Di conseguenza $P'(u) = (-2\sin u, 2\cos u)$. La direzione normale è quindi data dal vettore $(\cos u, \sin u)$. D'altra parte, sostituendo le coordinate $x(u)$ e $y(u)$ nel gradiente, otteniamo $(4\cos u, 4\sin u)$. Questa è la conferma della proprietà di ortogonalità (in alternativa, senza passare per la direzione normale possiamo effettuare il prodotto scalare $P' \cdot \nabla$).

Per dimostrare, in generale, la proprietà appena vista è sufficiente calcolare in due modi la derivata della funzione composta $\varphi(u) = f(x(u), y(u))$ rispetto al parametro u. Da un lato, poiché $\varphi(u)$ si annulla lungo tutti i punti della curva, in particolare essa è una funzione *costante*, quindi la sua derivata vale 0. Dall'altro lato, applicando la derivazione di una funzione composta otteniamo

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u), y(u))\frac{dx}{du}(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u), y(u))\frac{dy}{du}(u)$$

e nel linguaggio del prodotto scalare abbiamo che

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot P' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \perp P' \ .$$

2.4 Curve nello spazio.

Le parametrizzazioni in un riferimento $Oxyz$ danno luogo a cammini nello spazio anziché nel piano. Proprio come accade passando da una retta nel piano Oxy a una retta nello spazio $Oxyz$, la descrizione di queste curve per mezzo di equazioni cartesiane diventa più complessa, essendo necessarie due equazioni anziché una. Ad esempio, la curva $\mathcal{C}$ descritta da

$$P(u) = (7\cos u, 0, 7\sin u)$$

è una circonferenza di raggio 7, centrata nell'origine e contenuta nel piano xz. Per trovare due equazioni cartesiane di $\mathcal{C}$ possiamo intersecare la sfera

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$$

(luogo dei punti (x, y, z) distanti 7 da $(0, 0, 0)$, quindi tali che $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 7$) col piano xz di equazione $y = 0$, ottenendo

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \ .$$

Scriviamo invece equazioni parametriche della circonferenza ottenuta intersecando la stessa sfera $\mathcal{S}$ col piano $\pi : x - z = 0$. Con semplici passaggi otteniamo la relazione

$$\frac{2}{49}x^2 + \frac{1}{49}y^2 = 1$$

(infatti "dall'alto" vediamo un'ellisse con i fuochi sull'asse y) e deduciamo la parametrizzazione

$$P(u) = \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\cos u, 7\sin u, \frac{7}{\sqrt{2}}\cos u\right) \ .$$

Calcoliamo il vettore tangente $P'(u)$:

$$\frac{dP}{du} = \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u, 7\cos u, -\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u\right) \ .$$

Passiamo a $P''(u)$:

$$\frac{d^2P}{du^2} = \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}\cos u, -7\sin u, -\frac{7}{\sqrt{2}}\cos u\right) \ .$$

Poiché la curvatura è sempre la stessa lungo ogni cerchio massimo (un cerchio ottenuto con un piano che passa per il centro della sfera), essa dovrebbe essere uguale a $\frac{1}{7}$ come per la circonferenza precedente (il raggio di curvatura vale chiaramente 7). Vediamo:

$$k = \frac{\left|\left|\left(-\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u, 7\cos u, -\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u\right) \times \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}\cos u, -7\sin u, -\frac{7}{\sqrt{2}}\cos u\right)\right|\right|}{\left|\left|\left(-\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u, 7\cos u, -\frac{7}{\sqrt{2}}\sin u\right)\right|\right|^3} ,$$

ma poiché P' è in questo caso ortogonale a P'', il modulo del loro prodotto vettoriale è semplicemente il prodotto dei moduli, $7 \cdot 7 = 49$. Abbiamo così la conferma che $k = \frac{49}{7^3} = \frac{1}{7}$.

Studiamo ora una curva meno elementare: l'*elica circolare*. Cosa accade mentre saliamo lungo una scala a chiocciola? Percorriamo il tragitto con la legge

$$P(u) = (\cos u, \sin u, u) ;$$

infatti associamo a un moto circolare la continua salita lungo l'asse z. Abbiamo:

$$P' = (-\sin u, \cos u, 1) \ , P'' = (-\cos u, -\sin u, 0) \ , \ k = \frac{||(\sin u, -\cos u, 1)||}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \ .$$

Notiamo che anche in questo caso non era necessario calcolare esplicitamente il prodotto vettoriale perché P' è ortogonale a P''. Comunque, una volta calcolato, sfruttiamolo per ottenere il vettore normale $\mathbf{n}$ semplicemente come

$$\mathbf{n} = \frac{P''}{||P''||} = \frac{P''}{1} = P''$$

(infatti P'' è già versore). Infine, il vettore binormale in questo esempio è

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{(-\sin u, \cos u, 1)}{\sqrt{2}} \times (-\cos u, -\sin u, 0) = \frac{(\sin u, -\cos u, 1)}{\sqrt{2}} \ .$$

Il **triedro di Frenet** è la terna $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ che accompagna il punto mobile $P(u)$ lungo una data curva. Il **piano osculatore** nel punto $P(u)$ è il piano passante per $P(u)$ e parallelo ai vettori tangente e normale. Intuitivamente, si tratta del piano su cui avremmo la sensazione di camminare se effettuassimo un movimento microscopico lungo la curva nel punto in esame. Questo piano "contiene la curva in un intorno infinitesimo del punto". Al variare del punto, il piano approssimante deve adattarsi alla nuova pendenza suggerita dai vettori $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$; possiamo anche dire che il piano deve restare ortogonale al vettore binormale $\mathbf{b}$.

Oltre alla formula $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}$, già trattata, abbiamo un nuovo fenomeno:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n} \ .$$

In termini meno formali, la variazione nella direzione del "chiodo" del piano osculatore è diretta secondo il vettore normale. Concentriamoci però sul numero reale τ; esso esprime la velocità con cui varia la pendenza del piano. Questo fattore τ è la **torsione**. Infine, l'ultima delle tre *formule di Frenet* è

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} - \tau \mathbf{b} \ .$$

Similmente alla formula della curvatura, la tecnica per dimostrare queste formule utilizza le proprietà delle derivate e alcune operazioni sui vettori (siamo nel territorio della cosiddetta "analisi vettoriale").

Capitolo 3

Geometria differenziale delle superfici.

3.1 Parametrizzazioni di superfici.

Dal punto di vista delle equazioni parametriche, il passaggio da rette nel riferimento Oxy a piani nel riferimento $Oxyz$ non accresce la complessità della trattazione ma si traduce semplicemente nell'aggiunta di una coordinata. Ad esempio il piano π di equazione (cartesiana, implicita) $2x + 3y - z = 0$ può essere letto come funzione di due variabili $z = 2x + 3y$ e descritto con le equazioni parametriche

$$x = u \ , \ y = v \ , \ z = 2u + 3v \ .$$

È chiaro che non possiamo interpretare u e v come "tempo" perché banalmente il tempo si sviluppa lungo l'insieme dei numeri reali. Possiamo però sempre immaginare una funzione, ora dallo spazio delle variabili u, v allo spazio vero e proprio $\mathbf{R}^3$. Il punto $P \in \pi$ seguirà la legge

$$P(u, v) = (u, v, 2u + 3v) \ .$$

Come il segmento o la semiretta del tempo si stendeva lungo la curva, così ora un "fazzoletto" o una parte illimitata del piano si applica alla superficie, aderendo ad essa e trasportando su di essa le informazioni provenienti dalla porzione di piano. Vediamo l'esempio della sfera.

La sfera con centro nell'origine e raggio 1 può essere descritta dall'equazione cartesiana

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \ .$$

Per trovare una parametrizzazione di questa superficie possiamo interpretare la sfera come una superficie di rotazione: la circonferenza descritta dalla legge $(x, y, z) = (\cos u, 0, \sin u)$, sezione della sfera col piano xz, ruota intorno all'asse z e forma la superficie desiderata. Durante la rotazione, ogni punto $(\cos u_0, 0, \sin u_0)$ descrive a sua volta una circonferenza alla quota (fissa) $z = \sin u_0$, intorno all'asse z. Il raggio di quest'ultima circonferenza è uguale a $\cos u_0$ e quindi introducendo un secondo parametro per descrivere tale curva otteniamo

$$x = \cos u_0 \cos v \ , \ y = \cos u_0 \sin v \ , \ z = \sin u_0 \ .$$

Infine, sbloccando il primo parametro, u, otteniamo una parametrizzazione su tutta la sfera:

$$x = \cos u \cos v \ , \ y = \cos u \sin u \ , \ z = \sin u \ .$$

Gli intervalli di definizione dei due parametri sono importanti se aspiriamo ad una parametrizzazione biiettiva. Se lasciamo u e v liberi di variare come vogliono, essi forniranno una parametrizzazione dall'*intero* $\mathbf{R}^2$ alla sfera in $\mathbf{R}^3$ con infinite ripetizioni, causando una ridondanza dell'informazione. Possiamo quindi restringere il dominio al rettangolo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \quad \subseteq \quad \mathbf{R}^2.$$

In questo modo, u dà luogo a una semicirconferenza che poi ruota di un giro intero mediante $v \in [0, 2\pi]$. Il problema della ridondanza non può essere risolto completamente. Esistono punti problematici in ogni parametrizzazione (qui ad esempio i poli, $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$) ma almeno nella "grande maggioranza" dei punti non passiamo più di una volta.

Esercizio

Verificare che la parametrizzazione

$$P(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad : \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

descrive un cosiddetto "toro" (una sorta di ciambella).

3.2 Avventure nel piano tangente a una superficie.

Come le curve generalizzano le rette, così le superfici generalizzano i piani. Ancora una volta le derivate (ora parziali) giocano un ruolo preminente se siamo interessati alle informazioni locali della superficie. Al microscopio, una sfera sembra un piano: il pavimento di una casa è piano a dispetto della curvatura terrestre...

Data una superficie parametrizzata dal punto $P(u, v)$, con $(u, v) \in A \subseteq \mathbf{R}^2$, possiamo raggiungere e oltrepassare un fissato punto $P(u_0, v_0)$ in infiniti modi, scegliendo qualunque curva γ che lo contenga. Attenzione: γ non è una semplice curva nello spazio, passante per P, perché appunto deve viaggiare sulla superficie. Per costruire γ possiamo intanto creare liberamente una curva parametrizzata da $\varphi(h) = (u(h), v(h))$, da un intervallo $J \subseteq \mathbf{R}$ ad A. Componendo poi φ con $P(u, v)$, dove il dominio di P è appunto A, otteniamo una curva idonea. Ad esempio, per muoverci (con un percorso non tanto banale...) in un toro $\mathcal{T}$ come quello dell'esercizio appena visto possiamo considerare la funzione φ da $J = [0, 2]$ a $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tale che

$$\varphi(h) = (u(h), v(h)) = (h, h^2) \ .$$

Percorriamo così un segmento di parabola, all'interno di $\mathbf{R}^2$, che ci porta da $(0, 0)$ a $(2, 4)$. Notiamo che nell'istante $h = 1$ transitiamo per il punto $(1, 1)$. Ora trasportiamo questo tragitto nello spazio, facendolo aderire al toro, mediante la parametrizzazione che avevamo definito nell'esercizio, ottenendo

$$\gamma(h) = P(u(h), v(h)) = ((2 + \cos h) \cos(h^2), (2 + \cos h) \sin(h^2), \sin h) \ .$$

Il percorso sul toro non è così immediato da disegnare. Dobbiamo tenere presente il modo in cui il "fazzoletto" A viene applicato sulla superficie, per poi immaginare il destino del tratto di parabola che si trovava nel fazzoletto e che ora è stato trasferito sul toro insieme a tutto l'ambiente A mediante la parametrizzazione $P(u, v)$, deformandosi al fine di seguire le fattezze della superficie in $\mathbf{R}^3$.

Torniamo ad analizzare l'istante $h = 1$; in quel momento passiamo sul punto $W = P(1, 1) = ((2 + \cos 1) \cos 1, (2 + \cos 1) \sin 1, \sin 1)$ che può essere approssimato come

$$((2+0.5403)\cdot 0.5403, (2+0.5403)\cdot 0.8415, 0.8415) \simeq (1.3725, 2.1377, 0.8415)\ .$$

$\boxed{\textsf{Esercizio}}$

Rappresentare graficamente questa curva nel toro (in particolare, tracciare il punto W).

Ora che sappiamo camminare lungo il toro mediante una curva γ nello spazio (definita a prescindere dal toro che la contiene), possiamo calcolare il vettore tangente $\frac{d\gamma}{dh}$. Esso sarà, in particolare, un vettore tangente del toro nel punto W. Siamo tornati su un vecchio argomento. Abbiamo:

$$\frac{d\gamma}{dh} = (-\sin h\cos(h^2) - 2h(2+\cos h)\sin(h^2), -\sin h\sin(h^2) + 2h(2+\cos h)\cos(h^2), \cos h)\ .$$

Ad esempio, nel punto $Q = \gamma(0) = (3,0,0)$ il vettore tangente è uguale a $(0,0,1)$, mentre in $R = \gamma\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(0, 2+\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sin\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ il vettore tangente è diventato

$$\left.\frac{d\gamma}{dh}\right|_R = \left(-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(2+\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), -\sin\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \simeq$$

$$\simeq (-5.7958, -0.95, 0.3122)\ .$$

In virtù delle proprietà della derivazione, ciò che accade in generale è

$$\frac{d\gamma}{dh} = \frac{d(P\circ\varphi)}{dh} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{du}{dh} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{dv}{dh}\ .$$

I vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$ e $\frac{\partial P}{\partial v}$ sono interessanti perché generano *qualunque* vettore tangente, al variare della curva γ, grazie ad opportuni coefficienti reali $\frac{du}{dh}$, $\frac{dv}{dh}$. In particolare, essi stessi sono vettori tangenti: per ottenere $\frac{\partial P}{\partial u}$ occorre muoversi lungo la prima coordinata di $\mathbf{R}^2$, lasciando ferma la seconda. In dettaglio, fissiamo un punto $P(u_0, v_0) \in \mathcal{T}$ e consideriamo la curva parametrizzata da $\varphi(h) = (u(h), v(h)) = (u_0 + h, v_0)$. Calcolando le rispettive derivate otteniamo

$$\frac{du}{dh} = 1 \quad , \quad \frac{dv}{dh} = 0\ .$$

Di conseguenza, costruita γ come di consueto, abbiamo:

$$\frac{d\gamma}{dh} = \frac{\partial P}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial P}{\partial v}\cdot 0 = \frac{\partial P}{\partial u}\ .$$

Possiamo operare similmente con la seconda coordinata. È d'obbligo notare che il vettore costituito dalle due derivate non è altro che il *vettore velocità* della parametrizzazione φ, dentro $\mathbf{R}^2$, cioè $\frac{d\varphi}{dh}$. Possiamo quindi interpretare il vettore tangente $\frac{d\gamma}{dh}$ (in $\mathbf{R}^3$) come il prodotto di matrici (o prodotto scalare)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dh} \\ \\ \frac{dv}{dh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \end{pmatrix} \left(\frac{d\varphi}{dh}\right)^t\ .$$

Attenzione: la prima matrice ha due *vettori tridimensionali* come componenti, mentre il vettore colonna è effettivamente un vettore in $\mathbf{R}^2$. Tornando così all'esempio precedente, possiamo ottenere $\frac{d\gamma}{dh}$ calcolando preventivamente

$$\frac{\partial P}{\partial u} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial v} = (-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0) \ ,$$

poi calcolando

$$\frac{d\varphi}{dh} = (1, 2h)$$

e infine moltiplicando le due matrici:

$$\begin{pmatrix} (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) & (-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2h \end{pmatrix} =$$

$$= (-\sin u \cos v - 2h(2+\cos u)\sin v, -\sin u \sin v + 2h(2+\cos u)\cos v, \cos u) =$$

$$= (-\sin h \cos(h^2) - 2h(2+\cos h)\sin(h^2), -\sin h \sin(h^2) + 2h(2+\cos h)\cos(h^2), \cos h)$$

(ricordiamo infatti che $u = h$ e $v = h^2$ in questo esempio).

Abbiamo ritrovato il vettore calcolato prima. L'insegnamento che ne traiamo è chiaro: il vettore tangente sulla superficie, lungo una certa curva, è un'elaborazione del vettore tangente più elementare, relativo alla controimmagine della curva in $\mathbf{R}^2$, con l'intervento dei due vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$ e $\frac{\partial P}{\partial v}$. Insomma, è sufficiente conoscere il comportamento della curva bidimensionale (quella che verrà trasformata nella curva vera e propria sulla superficie) per poi trasportare i dati sulla superficie, con l'ausilio dei vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$ e $\frac{\partial P}{\partial v}$. Questi due vettori possono essere scritti più sinteticamente come P_u e P_v e, per quanto abbiamo detto, rappresentano il "trasformatore" dalla velocità in $\mathbf{R}^2$ alla velocità in $\mathbf{R}^3$ lungo la superficie in esame.

Esercizio

Scrivere un'equazione cartesiana del *piano tangente* a $\mathcal{T}$ nel punto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Sol.

Il punto in esame è $(0, 2, 1)$. I vettori P_u e P_v sono rispettivamente uguali a $(0, -1, 0)$ e $(-2, 0, 0)$, quindi abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \ .$$

Siamo infatti in presenza di un punto "a quota massima" sul quale è possibile appoggiare un piano orizzontale. Al microscopio, in un intorno di questo punto avremmo la sensazione di camminare su un pavimento perfettamente orizzontale.

3.3 La lunghezza di una curva.

Per calcolare la lunghezza di una curva con parametrizzazione $\gamma(h)$ definita in un dominio J di $\mathbf{R}$ e con destinazione $\mathbf{R}^3$, dobbiamo specificare i punti estremi $\gamma(h_0)$, $\gamma(h_1)$ e poi, spingendo al limite il calcolo della lunghezza di una sequenza di spezzate lungo la curva, arriviamo facilmente all'integrale

$$\int_{h_0}^{h_1} ||\gamma'(h)||dh \ .$$

Sebbene questo calcolo rientri nello studio precedente delle curve, ricordando che la nostra curva ora è collocata in una data superficie parametrizzata da $P(u,v)$, possiamo scrivere

$$||\gamma'(h)|| = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{du}{dh} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{dv}{dh}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{du}{dh} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{dv}{dh}\right)}$$

e introducendo i simboli

$$E = P_u \cdot P_u \quad , \quad F = P_u \cdot P_v \quad , \quad G = P_v \cdot P_v$$

otteniamo la formula

$$\int_{h_0}^{h_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dh}\right)^2 + 2F\frac{du}{dh}\frac{dv}{dh} + G\left(\frac{dv}{dh}\right)^2}\, dh \ .$$

I numeri reali E, F, G sono quindi legati al "movimento infinitesimo lungo la superficie" e i loro valori determinano le fattezze curvilinee dell'immagine della curva inizialmente definita in un dominio del piano uv. Se ad esempio la superficie è ricca di avvallamenti o rigonfiamenti, l'immagine di una curva registrerà queste imperfezioni (tramite E, F, G) e le relative lunghezze potranno risultare molto più grandi rispetto a un'immagine collocata in una superficie poco ondulata se non piana.

La scrittura $Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2$, equivalente a

$$\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

è nota come *prima forma quadratica fondamentale.*

3.4 È sempre possibile "appoggiare" il piano tangente?

Non è sempre possibile. Dobbiamo sostituire il verbo "appoggiare" con qualcosa di più generale che diventa "appoggiare" solo se le condizioni lo consentono. Ad esempio, nel punto $P(\pi, 0) = (1,0,0)$ — sempre nel toro $\mathcal{T}$ — possiamo certamente costruire il piano tangente come prima, arrivando all'equazione

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ .$$

Ci troviamo in un punto interno alla ciambella. Al microscopio percepiamo un intorno verticale, appunto il piano di equazione $x = 1$, ma questo piano è incastonato nel toro; se ci muoviamo (con un passo piccolissimo) avanti e indietro in verticale, lungo la direzione di P_u, abbiamo la sensazione di stare su una collinetta, mentre se ci muoviamo in orizzontale nella direzione di P_v sentiamo di trovarci in un fondovalle. Insomma, i segni delle due curvature non sono concordi, a differenza di quanto accadeva per l'altro punto. Come è fatta, allora, la superficie in questo intorno? Come la sella di un cavallo. La sella consente di appoggiare le gambe ma al tempo stesso segue il profilo del dorso del cavallo. Non sarebbe possibile fissare una sella per cavalcare una palla antiscoppio per ginnastica...

Ecco che entra in scena la *curvatura gaussiana di una superficie*, K. Essa, per un punto fissato, è definita come il prodotto della massima curvatura per la minima. Attenzione: la minima e la massima curvatura sono invece curvature di *curve*, non della superficie. Chiaramente, se queste due curvature sono di segno opposto (come nel caso presente), la curvatura gaussiana sarà negativa. Se invece K è positiva abbiamo la percezione di trovarci su una vera e propria collinetta a prescindere dalla direzione che scegliamo.

Dobbiamo in realtà essere più precisi e prestare attenzione anche a un altro particolare: per misurare la curvatura di una curva lungo questo toro dobbiamo scegliere una curva che abbia il vettore normale diretto come il vettore normale della superficie. Quest'ultimo è chiaramente il prodotto vettoriale di P_u e P_v, normalizzato. Denotiamolo con $\mathbf{N}$.

La condizione sul vettore normale è cruciale. Se ad esempio percorriamo una curva molto stretta come una minuscola circonferenza — pur restando sul toro — percepiamo una curvatura che non rispecchia le fattezze della superficie, essendo frutto del nostro percorso troppo "a gomito". Il nostro vettore normale, infatti, si discosta molto dalla normale della superficie; esso è diventato quasi un vettore tangente sulla superficie! Tuttavia, esiste un modo per misurare la curvatura della superficie nonostante venga utilizzata una curva non idonea. È sufficiente calcolare il prodotto scalare

$$k_N = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \ .$$

La curvatura calcolata in questo modo è detta **curvatura normale** ed è appunto la curvatura che ci interessa. Utilizzando le proprietà delle derivate col supporto del prodotto scalare (con lo stesso spirito del calcolo della curvatura per le curve, ma con qualche calcolo in più) è possibile dimostrare che

$$k_N = \frac{e\left(\frac{du}{dh}\right)^2 + 2f\frac{du}{dh}\frac{dv}{dh} + g\left(\frac{dv}{dh}\right)^2}{E\left(\frac{du}{dh}\right)^2 + 2F\frac{du}{dh}\frac{dv}{dh} + G\left(\frac{dv}{dh}\right)^2}$$

dove fanno il loro ingresso le quantità

$$e = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \cdot \mathbf{N} \quad , \quad f = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{N} \quad , \quad g = \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \cdot \mathbf{N} \ .$$

Denotiamo le derivate parziali seconde con P_{uu}, ... Ricordiamo poi che $P_{uv} = P_{vu}$ per un noto teorema. Possiamo ulteriormente sintetizzare la formula, questa volta in modo più incisivo e illuminante. Ricordando che $\left(\frac{du}{dh}, \frac{dv}{dh}\right)$ è il vettore tangente $\varphi'(h)$ relativo alla curva ancora da traghettare in $\mathbf{R}^3$ (quindi essa giace ancora nel piano uv, nel fazzoletto in $\mathbf{R}^2$, non sulla superficie), trascurando situazioni eccezionali possiamo dividere il numeratore e il denominatore per $\left(\frac{du}{dh}\right)^2$ così da enfatizzare il *coefficiente angolare* del vettore tangente,

$$m = \frac{\frac{dv}{dh}}{\frac{du}{dh}} \ ,$$

ottenendo la formula

$$k_N = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2} \; .$$

In questa preziosa miniatura convivono sei grandezze fondamentali. Le tre più recenti danno luogo alla cosiddetta *seconda forma quadratica fondamentale*

$$\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

che contiene dati essenziali sulla curvatura della superficie — lo vedremo. Intanto, la nuova formula ci permette di dedurre che la curvatura normale *non dipende dalla scelta della curva*, per una direzione fissata (come avevamo accennato prima). Più precisamente, curve con curvatura diversa portano tutte alla stesso dato sulla curvatura normale purché abbiano vettori tangenti proporzionali (merito del prodotto scalare!). Questo è l'enunciato del *teorema di Meusnier*.

Dalle interazioni tra la prima e la seconda forma fondamentale dipende la percezione sensoriale che abbiamo nel toccare la superficie in esame. Al variare del coefficiente angolare ispezioniamo tutto l'intorno del punto su cui ci troviamo, misurando le variazioni della curvatura normale.

Concentriamoci sulle due curvature estreme, la massima e minima. Se hanno segno diverso, il loro prodotto (curvatura gaussiana) è negativo: ci troviamo in un *punto di sella*, o *punto iperbolico*. Se invece le due curvature hanno segni concordi, siamo su una collinetta o in un avvallamento (punto *ellittico*). Se una, ma soltanto una, è nulla, il punto è *parabolico*.

Un teorema fondamentale afferma che **la curvatura gaussiana è uguale a**

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \; .$$

Inoltre, definendo la *curvatura media* come la media delle curvature minima e massima, in simboli H, abbiamo che

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \; .$$

Conoscendo K e H possiamo trovare le due curvature estreme o "principali" (siano esse λ_1 e λ_2), mediante la risoluzione dell'equazione

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \; ,$$

dato che la somma delle radici è il coefficiente di λ col segno cambiato, mentre il prodotto è il termine noto.

Abbiamo utilizzato la lettera λ per un motivo preciso: in altri contesti sappiamo che essa è legata al calcolo degli autovalori, ma esiste in realtà un collegamento con gli autovalori anche nella situazione presente. Infatti sarebbe possibile dimostrare che le due curvature estreme sono gli autovalori della matrice

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \; ,$$

mentre i rispettivi autovettori indicano le direzioni *principali* dove appunto percepiamo la minima o la massima curvatura. Ricordiamo che le direzioni devono sempre essere pensate in $\mathbf{R}^2$, prima di applicare il fazzoletto sulla superficie.

3.5 Una superficie rigata... acquista ancora più valore!

In questo paragrafo vediamo un esempio di superficie che può essere realizzata "fisicamente" come l'unione di un insieme infinito di rette. Il prototipo di questa tipologia di superfici è il cilindro, costituito da una schiera di rette tra loro parallele. Un esempio ancora più elementare è ... un piano qualunque nello spazio. Nel caso del cilindro, le rette sono tutte ortogonali a una circonferenza (sezione del cilindro). Ma cosa succede se l'angolo di ancoraggio sulla circonferenza non è retto? Se le rette scorrono lungo la circonferenza in modo non ortogonale, otterremo una superficie con punti iperbolici che alla fine non darà affatto l'impressione di contenere infinite rette nel suo interno, essendo "curva" in tutti i suoi punti.

Facciamo un passo indietro e introduciamo intanto la superficie protagonista, $\mathcal{I}$, di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2 - 1 \; .$$

Sezionandola con piani del tipo $z = k$ otteniamo circonferenze sempre più grandi al crescere di k. Tagliandola invece col piano di equazione $y = 0$ otteniamo l'iperbole descritta dalla legge $x^2 - z^2 = 1$. Questa iperbole, ruotando, descrive proprio la superficie $\mathcal{I}$. Possiamo infatti parametrizzare $\mathcal{I}$ (nel semispazio con le z positive) mediante la funzione

$$P(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{u^2 - 1}) \quad : \quad (u, v) \in [1, +\infty) \times [0, 2\pi] \; .$$

Come di consueto, essa mette in luce la rotazione del profilo — un'iperbole parametrizzata da $(u, 0, \sqrt{u^2 - 1})$ — attorno all'asse z, grazie al secondo parametro v.

Prima di affrontare il discorso della schiera di rette, dimostriamo che la curvatura gaussiana è negativa in ogni punto di $\mathcal{I}$, anzi, calcoliamo esplicitamente le curvature gaussiana e media al variare del punto su $\mathcal{I}$. Abbiamo:

$$P_u = \left(\cos v, \sin v, \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}}\right) \; , \; P_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$P_{uu} = \left(0, 0, \frac{-1}{(u^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad , \quad P_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \quad , \quad P_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0) \; ,$$

$$\mathbf{N} = \frac{P_u \times P_v}{||P_u \times P_v||} = \left(u\sqrt{\frac{2u^2 - 1}{u^2 - 1}}\right)^{-1} \left(\frac{-u^2 \cos v}{\sqrt{u^2 - 1}}, \frac{-u^2 \sin v}{\sqrt{u^2 - 1}}, u\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2u^2 - 1}} \left(-u \cos v, -u \sin v, \sqrt{u^2 - 1}\right) \; .$$

Deduciamo quindi che

$$E = \frac{2u^2 - 1}{u^2 - 1} \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = u^2 \; ,$$

$$e = \frac{-1}{(u^2 - 1)\sqrt{2u^2 - 1}} \quad , \quad f = 0 \quad , \quad g = \frac{u^2}{\sqrt{2u^2 - 1}} \; .$$

Infine,

$$K = \frac{\frac{-u^2}{(u^2-1)(2u^2-1)}}{\frac{u^2(2u^2-1)}{u^2-1}} = \frac{-1}{(2u^2 - 1)^2}$$

e per quanto riguarda la curvatura media abbiamo:

$$H = \frac{\frac{2u^2}{\sqrt{2u^2-1}}}{2\frac{u^2(2u^2-1)}{u^2-1}} = \frac{u^2-1}{(2u^2-1)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

In particolare, emerge che la curvatura gaussiana è sempre negativa. In questo esempio è possibile calcolare facilmente le due curvature principali; infatti risolvendo l'equazione $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ otteniamo

$$\lambda_1 = \frac{-1}{(2u^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}} \ .$$

Esiste in effetti un metodo più semplice: data la nullità di F e f, la matrice da diagonalizzare è uguale a

$$\frac{1}{EG}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \ ,$$

quindi è già diagonale. In particolare, gli autovalori sono proprio gli elementi sulla diagonale. I rispettivi autovettori sono $(1,0)$ e $(0,1)$. La curvatura positiva massima, $\frac{g}{G} = |\lambda_2|$, viene percepita ruotando intorno all'asse z lungo una circonferenza qualunque, mentre la negativa di modulo massimo viene registrata lungo le iperboli ottenute sezionando la superficie con piani contenenti l'asse z. I massimi valori (in modulo) delle due curvature nell'intera superficie vengono registrati negli infiniti punti della circonferenza a quota $z = 0$ (qui infatti u vale 1 e minimizza entrambi i denominatori). Attenzione, si tratta in effetti di un limite *finito* per u che tende a 1 (il vettore normale e altri indicatori tendono a infinito).

Avviciniamoci ora alla questione della decomposizione in rette. Prendiamo spunto dalla curvatura, posizioniamoci in un punto fissato e chiediamoci:

In quale direzione dobbiamo muoverci per registrare la curvatura nulla?

La nostra richiesta ha senso perché in questo esempio esistono direzioni con curvatura negativa e altre con curvatura positiva, quindi (per un noto teorema sulla continuità) esisteranno certamente direzioni di transizione, con curvatura appunto nulla. Anzi, ne esisteranno almeno due (nella transizione da positiva a negativa e poi tornando alla positiva). La funzione curvatura è infatti

$$k_N = \frac{e + gm^2}{E + Gm^2} \ ,$$

quindi essa si annulla per

$$m = \pm\sqrt{\frac{-e}{g}} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \ .$$

Abbiamo così esplicitato le direzioni lungo le quali svanisce la curvatura. Tralasciando il caso limite di $u = 1$, più saliamo di quota e più m si riduce, in valore assoluto, tendendo a zero. Questo significa che le due direzioni tendono ad avvicinarsi sempre di più, come i due rami di una X che si chiudono gradualmente verso una I. Attenzione: queste considerazioni su m riguardano il fazzoletto *prima della mappatura su* $\mathcal{I}$. Non è semplice descrivere localmente il fenomeno, sui punti della superficie vera e propria, dato che l'immagine del fazzoletto è alterata notevolmente, ma a questo punto è fondamentale osservare che le direzioni relative alla curvatura nulla corrispondono a vere e proprie *rette incastonate* nella superficie. Se lanciamo una boccia lungo una di queste direzioni, essa prosegue in modo rettilineo mantenendosi sorprendentemente sulla superficie, senza mai abbandonarla. Siamo in presenza di una superficie "rigata". Questo fenomeno non accade ad esempio nel toro. In quest'ultima superficie, pur esistendo direzioni a curvatura nulla — sempre come transizioni tra la curvatura negativa e la positiva — è chiaro che lanciando una boccia (immaginando un moto rettilineo uniforme) essa abbandonerà presto la superficie, perdendosi nello spazio. Per dare un rigore algebrico a questa osservazione, così da dimostrarla, è sufficiente scrivere l'equazione della superficie $\mathcal{I}$ come

$$z^2 - x^2 = y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z+x)(z-x) = (y+1)(y-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z+x}{y+1} = \frac{y-1}{z-x}$$

(escludendo casi eccezionali) per poi trasformarla in una famiglia infinita di condizioni equivalenti a quella iniziale, purché esse siano prese tutte insieme:

$$\left[\frac{z+x}{y+1} = \alpha\right] \ \wedge \ \left[\frac{y-1}{z-x} = \alpha\right] \ \forall \alpha \in \mathbf{R} \ .$$

Ora, per ogni α fissato abbiamo due piani che identificano una retta specifica. Ad esempio, per $\alpha = 5$ otteniamo la retta

$$r_5 : \begin{cases} \frac{z+x}{y+1} = 5 \\ \\ \frac{y-1}{z-x} = 5 \end{cases}$$

e grazie alla presenza dei due 5 otteniamo nuovamente la relazione

$$\frac{z+x}{y+1} = \frac{y-1}{z-x} \ ,$$

quindi i punti che soddisfano le equazioni di r_5 (cioè i punti della retta stessa) soddisfano anche l'equazione di $\mathcal{I}$. In termini insiemistici, r_5 è *contenuta* in $\mathcal{I}$. Una seconda schiera di rette nasce dalla riformulazione

$$\frac{z+x}{y-1} = \frac{y+1}{z-x} \ .$$

È chiaro che una superficie rigata ammette in ogni suo punto direzioni con curvatura nulla, mentre il viceversa non è vero — il toro lo dimostra.

Un nuovo esempio di superficie rigata ottenuta con un polinomio di secondo grado è fornito dall'equazione

$$x^2 - y^2 - z = 0 \ .$$

Sezionando questa superficie con piani del tipo $z = d$ otteniamo iperboli equilatere. Partendo da un valore positivo di d e scendendo verso $d = 0$ esse tendono ad assomigliare sempre più ai loro asintoti, fino a diventare un'iperbole degenere per $d = 0$ (una sorta di X infinita), per poi tornare iperboli sempre meno affezionate agli asintoti (se d scende verso $-\infty$) ma giacenti oltretutto negli altri due quadranti definiti dagli asintoti.

Come prima, possiamo evidenziare le due schiere infinite di rette mediante un artificio:

$$(x+y)(x-y) = z \quad \Leftrightarrow \quad x+y = \frac{z}{x-y}$$

(salvo casi speciali) che riscriviamo come

$$[x+y=\alpha] \ \wedge \ \left[\frac{z}{x-y} = \alpha\right] \ \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

e il resto della procedura è lasciato come esercizio.

Le due superfici fanno parte dei 5 modelli di superficie definibile mediante un polinomio di secondo grado. Si tratta rispettivamente di un *iperboloide iperbolico* e di un *paraboloide iperbolico*. L'aggettivo ci ricorda il tipo di curvatura in ogni punto. Il sostantivo è legato al comportamento asintotico: la prima superficie ammette un *cono asintotico* a cui essa tende, avvicinandosi sempre più a questo cono dall'esterno; la seconda superficie non ammette un cono asintotico pur essendo illimitata (essa ha un ruolo analogo alla parabola in dimensione 2). Le tre restanti superfici sono l'*ellissoide* (sottinteso *ellittico*), il *parabolide ellittico*, l'*iperboloide ellittico*: abbiamo scorso molto velocemente le 5 *quadriche* non degeneri.