Appunti introduttivi

DI GEOMETRIA ANALITICA

Corso di laurea: Medicina e Chirurgia HT

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

A.A. 2020-2021

⟨ ultima modifica: 15 dicembre 2020 ⟩

Capitolo 1

Le matrici.

1.1 Il salto evolutivo dai numeri alle matrici.

Possiamo pensare alle matrici come a uno stadio più evoluto rispetto ai semplici numeri che utilizziamo per contare o per risolvere problemi algebrici più complessi. Ad esempio una *matrice di ordine* 2 è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

mentre una di ordine 3 è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} ,$$

quindi è chiaro che un numero reale può essere visto come una matrice di ordine 1. Come avviene per i numeri reali, le matrici vengono utilizzate per descrivere in modo efficace e naturale molte situazioni che sarebbero altrimenti gestite con difficoltà. Tutto sommato esse sono già nascoste dietro a problemi matematici relativamente facili, come la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases} .$$

Notiamo infatti che i coefficienti delle incognite danno luogo alla matrice A introdotta all'inizio. Potremmo quindi riscrivere il sistema come

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

ma attenzione, si tratta soltanto di una riscrittura esteticamente diversa, forse più elegante o leggermente più compatta, ma non certo risolutiva per il sistema, almeno se ci fermiamo qui. Insomma, per il momento abbiamo creato un manichino senza vita. Con l'occasione notiamo che le matrici possono essere anche non quadrate. Ad esempio i due numeri 8, 5 (i termini noti del sistema) formano una matrice alta 2 e lunga 1, dunque con due righe e una colonna. In questo caso diciamo che la *forma*, o il *tipo* della matrice è 2×1, mentre prima avevamo matrici quadrate di tipo 2×2 e 3×3 rispettivamente.

La matrice numerica a sinistra delle incognite è la *matrice incompleta* del sistema. La matrice incompleta con una colonna in più, quella dei termini noti, posta a destra, è la *matrice completa.*

Allo stato attuale, il difetto di una riscrittura mediante le matrici — come quella appena mostrata — è che gli oggetti matematici introdotti non hanno alcuna utilità. Come già detto, essi non sono dotati di vita propria e non collaborano affatto alla risoluzione del sistema. Stanno lì, ferme, inattive. Queste nostre matrici purtroppo non riescono a combinarsi insieme, come invece sanno fare i numeri reali. Infatti basta mettere vicini 3 e 6, ad esempio, per ottenere 18. Oppure mettendo vicini 3, poi x e poi un'altra x otteniamo il composto $3x^2$. Creiamo nuove molecole che invece non sembrano essere realizzabili per le matrici. Oltretutto questi composti entrano in gioco pesantemente nella risoluzione dei problemi matematici. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$7x = \sqrt{5}\ .$$

La sua soluzione, $\frac{\sqrt{5}}{7}$, scaturisce dall'esistenza dell'*inverso* di 7. Questo inverso è un vero e proprio antidoto contro il numero 7, visto che ha il potere di trasformare 7 nell'unità 1 mediante la moltiplicazione:

$$\frac{1}{7} \cdot 7 = 1\ .$$

Lo stesso antidoto, scritto anche a destra dell'uguale, produce la seguente reazione chimica:

$$\frac{1}{7} \cdot 7x = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{5}\ \Rightarrow\ x = \frac{\sqrt{5}}{7}\ .$$

Notiamo che non esiste antidoto per un'equazione come $0x = 5$. Infatti non esiste l'inverso dello zero. Una tale equazione non ammette infatti soluzione.

Esistono antidoti simili nel caso delle matrici di ordine 2 o anche maggiore? Esiste un modo per ottenere l'*inversa* di una data matrice? Quale matrice va messa a sinistra di A (come $\frac{1}{7}$ a sinistra del 7) in modo da ottenere l'unità mettendo a nudo le due incognite x e y?

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}\ .$$

Qui sorgono vari problemi. Verrebbe spontaneo, probabilmente, ricorrere all'antidoto

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\ .$$

Purtroppo poi non sapremmo come moltiplicare questa matrice per la matrice 2×1 formata dall'8 e dal 5. Oltretutto, se in un altro sistema al posto del 3 ci fosse uno zero, la prima equazione diventerebbe $-2y = 8$ e il sistema avrebbe come soluzione $x = 5 + 4\sqrt{2}$, $y = -4$, mentre la nostra matrice inversa rudimentale non potrebbe esistere (non esiste l'inverso di zero). Ma allora stiamo perdendo tempo? Stiamo complicandoci la vita cercando strane matrici che poi nemmeno riescono a risolvere alcuni sistemi? Questa non è matematica!

Ma riflettiamo. Forse questa strategia non è del tutto inutile. Uno dei compiti del matematico è proprio quello di dare la vita a una materia inizialmente sprovvista di tale opportunità. Nel caso in esame è necessario *insegnare* alle matrici la moltiplicazione. Occorre anche *definire* cosa è esattamente la matrice *"uno"*. Insomma, una volta messe le ali al rettile, dobbiamo creare tutte le connessioni anatomiche in modo che questo rettile divenga un uccello. Non basta che le ali siano costituite di materia organica; occorre armonizzarle e integrarle con il resto del corpo. Vedremo che la matrice "uno" non è la matrice che contiene tutti 1, ma comunque qualcosa di vicino ad essa.

1.2 Insegnamo alle matrici la moltiplicazione tra loro.

Insegnare la moltiplicazione a due numeri naturali è semplice, visto che $4 \cdot 5$ è uguale a $4+4+4+4+4$; in realtà stiamo supponendo che due numeri già sappiano come sommarsi tra loro, come $4+4 = (1+1+1+1)+(1+1+1+1) = (1+1+1+1+1+1+1+1)$ che si chiama 8. Il passaggio ai numeri razionali non è così drammatico, mentre il salto evolutivo dai numeri razionali ai numeri reali richiede il concetto di *limite* ed entriamo nel territorio (limitrofo...) dell'analisi matematica. Nel caso delle matrici, tuttavia, il problema della moltiplicazione si pone già nel caso dei numeri naturali; si tratta di un'evoluzione verso una direzione diversa da quella che raffina sempre più il tipo di numero.

Il passo iniziale verso la moltiplicazione è suggerito proprio dal significato delle equazioni del sistema. Come fare per ottenere $3x - 2y$ a partire dalla prima riga della matrice A e dalla matrice "colonna" 2×1 contenente x e y? Basta in effetti moltiplicare ordinatamente i singoli elementi e poi sommarli:

$$3 \cdot x + (-2) \cdot y \quad .$$

Similmente, con la seconda riga otteniamo $1 \cdot x + \sqrt{2} \cdot y$.

Se l'organismo è più complesso, anche la regola è più complessa ma segue lo stesso principio. Utilizzando la matrice B e scegliendo una colonna di tre numeri a piacere, abbiamo ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3-10 \\ 2+0-5 \\ -4+12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Proviamo ora a moltiplicare due organismi abbastanza complessi: due matrici quadrate di ordine 2 (cioè di tipo 2×2):

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \pi & -1 \end{pmatrix} .$$

Utilizziamo l'esperienza appena fatta. Separiamo la seconda matrice in due colonne e operiamo su ciascuna di esse. Ogni colonna subirà un trattamento che la trasformerà in una nuova colonna. Alla fine le due colonne trattate verranno nuovamente affiancate. Moltiplicando per la prima colonna otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-2\pi \\ 7+\pi\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Moltiplicando per la seconda colonna abbiamo

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4-\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Le due risposte costituiscono due rispettive colonne che possono essere affiancate, così da ottenere la matrice definitiva

$$\begin{pmatrix} 21-2\pi & 14 \\ & \\ 7+\pi\sqrt{2} & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Ora possiamo moltiplicare due organismi di ordine qualunque! Possiamo anche provare a moltiplicare due matrici che hanno *forme diverse*. L'importante è che...

<u>*la prima matrice abbia un numero di colonne uguale al numero di righe della seconda.*</u>

Vediamo due esempi (modifichiamo un esempio già visto):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3-10 & 7-2+16 \\ 2+0-5 & 7+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & \pi & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ -5 & 8 & 40 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3-10 & 7-2+16 & \pi-3+80 & 0+0+10 \\ 2+0-5 & 7+0+8 & \pi+0+40 & 0+0+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 21 & \pi+77 & 10 \\ -3 & 15 & \pi+40 & 5 \end{pmatrix} .$$

Analizziamo nel dettaglio il secondo esempio. Le matrici sono di tipo 2×3 e 3×4, mentre il risultato del loro prodotto è una matrice di tipo 2×4. Si tratta di qualcosa che ricorda la trasmissione ereditaria dei caratteri. Per potersi "accoppiare", due matrici devono essere compatibili: le *colonne* della prima sono infatti 3, tante quante le *righe* della seconda. Una volta consentito l'accoppiamento, il risultato è un organismo che eredita i caratteri dei genitori, precisamente le 2 righe della prima matrice e le 4 colonne della seconda. Il "3" può essere considerato la "specie", la caratteristica comune che rende possibile la fecondazione. In effetti con queste analogie stiamo un po' esagerando, visto che il risultato finale non è una matrice della stessa specie... Il 3 infatti è scomparso! (Esercizio: trovare un'analogia che sia più realistica — esiste almeno un modo migliore, nella stessa direzione).

Formalmente, ciò che deve accadere affinché due matrici di tipo $h \times k$ e $s \times t$ possano essere moltiplicate tra loro è che k sia uguale a s, e il risultato sarà una matrice di tipo $h \times t$. Attenzione: scambiando l'ordine delle due matrici si perde, in generale, la possibilità di moltiplicarle. Accadono poi altri fenomeni curiosi. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 24 & 6 \end{pmatrix} .$$

Questo mostra che il prodotto di matrici non è commutativo (in genere).

1.3 Ora siamo pronti per introdurre la matrice "inversa".

Torniamo al problema della risoluzione di un sistema lineare; più precisamente, all'inizio del capitolo stavamo cercando una matrice che, posta a sinistra di A avesse il ruolo di un antidoto come $\frac{1}{7}$ rispetto a 7. Insomma, ora che siamo un po' più educati al linguaggio delle matrici, possiamo esprimerci così: cerchiamo una matrice H tale che il prodotto HA sia uguale all'unità. Ma cosa intendiamo per "unità"?

Quando effettuiamo la consueta moltiplicazione tra numeri, l'unità è il cosiddetto "elemento neutro". Perché neutro? Perchè nell'atto della moltiplicazione esso non interferisce minimamente con l'altro fattore. Il ruolo dell'1 nella moltiplicazione tra numeri reali è lo stesso dello 0 nella somma, sempre tra numeri reali.

Ora, nel contesto delle matrici, qual è quella matrice che non interferisce mai durante il prodotto? Eccone una:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} .$$

Questa matrice ovviamente deve essere preceduta da una matrice di tipo $m \times 7$ per qualunque scelta di m, ma sempre con 7 colonne. In alternativa, può essere *seguita* da una matrice di tipo $7 \times n$, quindi con 7 righe. La diagonale con i numeri "1" viene detta **diagonale principale**. Ogni altra matrice quadrata $n \times n$ con tutti 1 sulla diagonale principale, e 0 altrove, è l'elemento neutro che cerchiamo e viene detta **matrice identità** I_n (vengono usati anche altri simboli). Facciamo un esperimento con I_5 (esercizio: calcolare esplicitamente il prodotto, lentamente, nei dettagli, per vedere proprio da vicino come funziona il meccanismo!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \pi & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \pi & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} .$$

Definizione. Data una matrice quadrata A, di tipo $n \times n$, la **matrice inversa** di A è quella matrice H, dello stesso tipo $n \times n$, tale che

$$HA = I_n \quad , \quad AH = I_n .$$

In letteratura, H viene generalmente denotata con A^{-1}

Attenzione: la seconda uguaglianza non è affatto banale, supponendo valida la prima uguaglianza, visto che il prodotto di matrici non è commutativo, lo sappiamo. Notiamo, però, che se esistesse una matrice C tale che $AC = I_n$, allora C sarebbe necessariamente uguale a H. Infatti con un tipico ragionamento matematico possiamo leggere il prodotto HAC in due modi: $(HA)C = I_nC = C$ e $H(AC) = HI_n = H$, quindi $C = H$. Attenzione: il ragionamento nasconde l'implicita assunzione che il prodotto è... **associativo** (approfondimento lasciato come tema facoltativo).

Facciamo ora un esempio: la matrice inversa di

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

risulta essere la stranissima — ma utilissima — matrice

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{17}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} & -\frac{7}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} .$$

Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{17}{20} & \frac{3}{10} \\ \\ \frac{7}{10} & -\frac{7}{20} & -\frac{3}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{17}{20} & \frac{3}{10} \\ \\ \frac{7}{10} & -\frac{7}{20} & -\frac{3}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} .$$

Come è stato possibile trovare questa matrice? Quali sono i metodi per costruire la matrice inversa, conoscendo la matrice iniziale? Il più naturale è quello di risolvere un sistema opportuno. Partendo dalla richiesta ingenua

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

e mettendo in funzione il prodotto di matrici che ormai conosciamo, ci avventuriamo nel sistema

$$\begin{cases} a + 2d + 3g = 1 \\ b + 2e + 3h = 0 \\ c + 2f + 3i = 0 \\ 2a + 2d = 0 \\ 2b + 2e = 1 \\ 2c + 2f = 0 \\ -d + 7g = 0 \\ -e + 7h = 0 \\ -f + 7i = 1 \end{cases} .$$

La soluzione di questo sistema è proprio quella riportata sopra (esercizio; notare che le equazioni si ripartiscono in tre gruppi da tre, indipendenti). Nel dettaglio, troveremmo che $a = -\frac{7}{10}$, $b = \frac{17}{20}$, ecc.

In generale, per esprimersi in modo chiaro ed efficace, è bene denotare le incognite con

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} .$$

Ad es. x_{23} è situato all'incrocio della riga 2 con la colonna 3.

Una volta introdotto il *determinante* sarà possibile calcolare le incognite in modo sistematico e ordinato, sebbene ancora abbastanza lentamente. Un metodo più veloce passa attraverso la *doppia riduzione a gradini* (metodo di Gauss-Jordan).

1.4 E adesso utilizziamo l'antidoto!

La nostra motivazione nel cercare la matrice inversa era quella di risolvere un sistema con la medesima strategia che adottiamo nel caso di una semplice equazione come $7x = \sqrt{5}$. Abbiamo ormai tutti gli strumenti per procedere. Dato ad es. il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y = 14 \\ -y + 7z = -7 \end{cases} ,$$

leggiamolo come

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Ora trattiamo la matrice 3×3 con l'antidoto, bilanciando la reazione anche a destra:

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{17}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} & -\frac{7}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{17}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} & -\frac{7}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Grazie alle proprietà della matrice inversa, a sinistra otterremo la semplice matrice identità I_3. A destra c'è un prezzo da pagare: occorre infatti moltiplicare la matrice inversa per la colonna dei termini noti, ma vale la pena di effettuare questi calcoli antipatici perché in realtà da tale prodotto scaturirà la soluzione! Vediamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} + \frac{119}{10} - \frac{21}{10} \\ \\ \frac{14}{5} - \frac{49}{10} + \frac{21}{10} \\ \\ \frac{2}{5} - \frac{7}{10} - \frac{7}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = \frac{70}{10} = 7 \\ \\ 0x + 1y + 0z = \frac{0}{10} = 0 \\ \\ 0x + 0y + 1z = -\frac{10}{10} = -1 \end{cases} \Rightarrow \ x = 7 \ , \ y = 0 \ , \ z = -1 \ .$$

Resta il problema di saper trovare esplicitamente l'antidoto, a partire da una qualunque matrice quadrata relativa a un dato sistema. Questa è una competenza più difficile, esattamente come quella di saper creare ad esempio un vaccino, rispetto alla competenza di somministrarlo. Oppure, pensiamo alla capacità di utilizzare un estintore, rispetto all'esperienza nel progettarlo e fabbricarlo. Fortunatamente, nel caso della matrice inversa il divario tra le due competenze è relativamente piccolo. E comunque, ovviamente, già la sola somministrazione del vaccino o l'azionamento dell'estintore (nel nostro caso la capacità di effettuare il prodotto) sono preziose abilità.

La cosiddetta "regola di Cramer" rende dolce la medicina della matrice inversa. Infatti le soluzioni ottenute mediante la moltiplicazione con l'inversa possono essere calcolate in un modo più sintetico e schematico. Dimostrare questa equivalenza di metodi non è immediato e costituisce un ottimo esercizio di allenamento con le matrici. Tuttavia, per applicare la regola di Cramer è necessario conoscere il *determinante*. Lo vedremo.

Secondo la regola di Cramer, la i-esima variabile (ad es. la y è la 2-esima, cioè la seconda variabile del gruppo di variabili x, y, z) è ottenuta come quoziente di due determinanti. Al denominatore va il determinante della matrice incompleta del sistema. Al numeratore va il determinante dell'incompleta sulla cui colonna i-esima abbiamo sovrapposto la colonna dei termini noti, come in un collage.

Considerando il sistema appena visto, abbiamo ad esempio

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{98 + 0 - 42 - 0 - 0 - 56}{14 + 0 - 6 - 0 - 0 - 28} = \frac{-0}{20} = 0 \ .$$

Resta il problema di saper calcolare il determinante. Per il momento siamo in grado di calcolarlo per il caso con due sole incognite (esercizio: applicare la formula di Cramer per sistemi di questo tipo).

Capitolo 2

Alcuni strumenti tecnici.

2.1 La riduzione a gradini: un esempio di "stile matematico".

In molte occasioni succede di sentire affermazioni del tipo: *Occorre fare un po' di conti... ma per sommare tutti questi numeri, certo, ci vorrebbe proprio un matematico!*

Niente è più lontano dallo spirito della matematica. Con tutto, assolutamente tutto il rispetto per il ruolo e la professionalità di ragionieri, commercianti e di molte altre tipologie di lavoratori, saper fare calcoli è una delle loro competenze e abilità, mentre al matematico è richiesto qualcos'altro...

Quale può essere dunque una competenza esclusivamente matematica? Vediamo un esempio elementare ma già significativo. Partiamo dal sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 7x + 4y = 9 \end{cases} .$$

Possiamo risolverlo sostituendo nella seconda equazione $x = \frac{12+3y}{2}$, ottenendo quindi

$$7\frac{12+3y}{2} + 4y = 9 \;\Rightarrow\; 84 + 21y + 8y = 18 \;\Rightarrow\; y = -\frac{66}{29} .$$

Ora possiamo trovare la x:

$$x = \frac{12 + 3(-\frac{66}{29})}{2} = \frac{348 - 198}{58} = \frac{75}{29} .$$

Possiamo dire che il metodo appena visto non è così "matematico" come altri, nonostante sia ineccepibile nei passaggi. Esiste però un metodo più snello per arrivare alla y — qui ci avviciniamo allo spirito matematico. Formalizziamo il nostro sistema utilizzando *simboli* per le due equazioni, scrivendo quindi

$$\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}$$

e modifichiamo la seconda equazione mescolandola opportunamente con la prima:

$$E_2 \longrightarrow 2E_2 - 7E_1 \;\Rightarrow\; 14x - 14x + 8y + 21y = 18 - 84 \;\Rightarrow\; y = -\frac{66}{29} .$$

In questo modo abbiamo ottenuto la y con meno calcoli rispetto al metodo precedente; in particolare non è stato necessario ricorrere alle frazioni, se non nella risposta finale. Certamente il risparmio di tempo ed energia non è troppo evidente, trattandosi di un esempio piccolo, ma l'aspetto più importante di questo secondo metodo è in effetti la *trasformazione* dell'equazione E_2 in un'equazione equivalente ma più facile da gestire. Un'equazione, anzi entrambe, sono così divenute oggetti simbolici da manipolare integralmente, senza dover analizzare i loro elementi costituenti, cioè i monomi che la compongono, se non in un secondo momento, e in un contesto meno complesso, meno problematico. Ebbene, lo spirito matematico è riposto proprio in questa astrazione e nella successiva trasformazione $E_2 \longrightarrow 2E_2 - 7E_1$, mentre le varie implicazioni $\Rightarrow$ sono semplici calcoli che possono essere eseguiti meccanicamente, senza alcuna visione globale, preoccupandosi soltanto di effettuare le operazioni con affidabilità.

Una delle peculiarità della matematica è in effetti quella di *modificare il punto di vista di un problema, modellizzandolo, trasformandolo e consentendone la risoluzione mediante strumenti diversi e possibilmente più efficaci*.

Analizziamo meglio quest'ultima frase; essa resta valida in moltissimi contesti della vita quotidiana, non necessariamente legati a numeri e incognite. Infatti senza saperlo noi facciamo matematica in tanti momenti del giorno, senza utilizzare numeri o formule! Si tratta di processi logici che mettiamo in atto senza accorgercene. Spesso nei nostri processi mentali trasformiamo oggetti, persone, situazioni in puri simboli e ragioniamo su questi ultimi, astrattamente, per poi ridare significato alle entità artificiali che abbiamo creato ed elaborato. Giusto come esempio minimo, facciamo matematica quando decidiamo l'ordine dei prodotti da acquistare, e il percorso conseguente, mentre ci muoviamo all'interno di un supermercato. Una volta arrivati in un certo reparto, ecco che le varietà dei prodotti (ad es. la pasta) tornano reali; smettiamo provvisoriamente di pensare al modello matematico globale e ci soffermiamo su un sotto-problema: minimizzare il prezzo del prodotto, scegliere il peso, esaminare alcune caratteristiche, ecc. (Ma anche questo in realtà è un piccolo problema matematico... che può avere una sola soluzione, o molte, o nessuna, proprio come un sistema lineare che risulti risolubile, o indeterminato, o senza soluzione).

Torniamo sul metodo alternativo appena presentato, inerente al sistema lineare; si tratta della cosiddetta *riduzione a gradini* (metodo di Gauss). Una volta trovata la y con questo metodo, potremmo calcolare la x con la vecchia procedura del metodo iniziale, già vista. È comunque invitante effettuare un esperimento alternativo anche con la x, sempre col metodo di Gauss. Ora la manipolazione cambia, ma agisce sempre sui simboli E_1, E_2:

$$E_2 \longrightarrow 3E_2 + 4E_1 \;\Rightarrow\; 21x + 8x + 12y - 12y = 27 + 48 \;\Rightarrow\; x = \frac{75}{29} \; .$$

Va detto, tuttavia, che la riduzione a gradini generale non prevede un duplice esperimento come quello visto ora perché le incognite sono in genere più di due e la strategia è diversa. La complicazione cresce al crescere del numero di incognite, ma il metodo risulta comunque più rapido di altri, in moltissimi casi. Vediamo infatti un esempio di sistema lineare in *tre* incognite:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 8 \\ 7x + 4y - 2z = 27 \\ 5x - 3y - 2z = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{cases} \; .$$

Purtroppo, in questo caso, l'eliminazione della x ad es. in E_2 non consente di concludere facilmente, dato che restiamo ancora con due incognite, non una sola. Ma l'approccio matematico è ancora evidente e cruciale: sposteremo il problema gradatamente, facilitandolo sempre più, fino a poter operare con estrema scioltezza e sicurezza.

$$E_2 \longrightarrow 3E_2 - 7E_1 \;\Rightarrow\; 21x - 21x + 12y + 14y - 6z - 21z = 81 - 56 \;\Rightarrow\; 26y - 27z = 25 \; .$$

$$E_3 \longrightarrow 3E_3 - 5E_1 \;\Rightarrow\; 15x - 15x - 9y + 10y - 6z - 15z = 21 - 40 \;\Rightarrow\; y - 21z = -19 \; .$$

Siamo nel mezzo del lavoro. Vediamo in che modo abbiamo modificato il sistema. Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 8 \\ 26y - 27z = 25 \\ y - 21z = -19 \end{cases} .$$

È successo qualcosa di interessante. Con l'aiuto di E_1, le altre due equazioni sono diventate più semplici, e ora possiamo concentrarci su queste ultime per ridurre ulteriormente E_3, col solo aiuto di E_2 (come nel precedente esercizio). Notiamo che ormai E_1 è stata sfruttata completamente; riutilizzarla ora, creerebbe un nuovo problema a causa del ritorno della x.

Per evitare malintesi indichiamo le nuove equazioni con E_2' e E_3'. Effettuiamo dunque la sostituzione

$$E_3' \longrightarrow 26E_3' - E_2' \;\Rightarrow\; 26y - 26y - 546z + 27z = -494 - 25 \;\Rightarrow\; -519z = -519 \;\Rightarrow\; z = 1 \; .$$

Forti di questo risultato, procediamo a ritroso "conquistando" prima la y e poi la x. Notiamo, infatti, che a questo punto il sistema è diventato

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 8 \\ 26y - 27z = 25 \\ z = 1 \end{cases} ,$$

quindi risalendo abbiamo

$$26y = 25 + 27z = 25 + 27 \cdot 1 = 52 \Rightarrow y = 2 \qquad \Uparrow \qquad 3x = 8 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \Rightarrow x = 3 \; .$$

2.2 Il determinante.

Se il *discriminante* (o "Delta") interviene pesantemente nella risoluzione delle equazioni di secondo grado, discriminando, distinguendo appunto i tre casi (due soluzioni, una, nessuna), così il *determinante* determina un numero preciso da associare a una data matrice quadrata. Questo numero, reale, è in effetti molto più complesso del discriminante e gioca un ruolo cruciale in moltissime questioni applicative e teoriche. In certi casi esso funge da "spia" di qualche processo in atto (se vale zero, la spia è accesa...). In altri casi il suo valore numerico ha un serio impatto con la realtà (ad es. la curvatura di una superficie in un punto fissato dipende da questo valore). Per i nostri scopi, il determinante è ad esempio uno strumento essenziale per costruire la matrice inversa.

Con un calcolo brevettato da secoli possiamo ottenere il determinante di una data matrice di ordine 3. Vediamo un esempio. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} ,$$

replichiamo a destra le prime due colonne, ottenendo la griglia

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -7 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Moltiplichiamo ora terne di numeri, scendendo in direzione Sud-Est:

$$1 \cdot 5 \cdot 9 = \mathbf{45} \quad , \quad -3 \cdot (-7) \cdot 0 = \mathbf{0} \quad , \quad 4 \cdot 2 \cdot 6 = \mathbf{48} .$$

Scendiamo ora al contrario, nei tre modi possibili, in direzione Sud-Ovest:

$$4 \cdot 5 \cdot 0 = \mathbf{0} \quad , \quad 1 \cdot (-7) \cdot 6 = -\mathbf{42} \quad , \quad -3 \cdot 2 \cdot 9 = -\mathbf{54} .$$

Infine, raccogliamo i frutti in due modi diversi: sommiamo i primi tre numeri e sottraiamo gli ultimi tre:

$$45 + 0 + 48 - (0 - 42 - 54) = 189 .$$

Benvenuto, determinante!

In simboli, indichiamo questo numero con

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} .$$

Il calcolo appena effettuato ha attraversato secoli e continenti, grazie alle sue peculiarità che lo rendono uno strumento essenziale per l'analisi delle matrici e dei vettori, con importanti conseguenze in tutti i campi interessati dal calcolo matriciale (ad es. la geometria dello spazio). È importante notare che la scelta di sommare e poi sottrarre è il principale ingrediente per il successo di questo oggetto matematico; passando alle matrici di ordine 4 è ancora possibile definire il determinante, questa volta sommando 12 prodotti opportuni e sottraendone altri 12. In realtà il determinante può essere definito per matrici quadrate di qualunque grandezza. I calcoli si complicano "in modo esponenziale" ma il numero ottenuto mantiene tutte le proprietà valide nel caso più semplice, quello che stiamo trattando noi. Facendo invece un passo indietro, osserviamo che il determinante di una matrice di ordine 2 è molto semplice da calcolare. Lo spirito è sempre quello di mescolare addendi col "+" e addendi col "−", ma in questo caso abbiamo soltanto un addendo per ogni segno. Ad esempio,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3 \cdot 2) = 11 .$$

Utilizzando i simboli possiamo scrivere

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr .$$

Una ragione del successo di questo numero speciale legato alle matrici di ordine 2 è che esso vale 0 se e solo se le righe (o le colonne) della matrice sono *proporzionali*. Infatti la legge $ps = qr$ esprime proprio tale proporzionalità. Il determinante è quindi un indicatore, una spia della proporzionalità. Passando all'ordine 3, si potrebbe dimostrare che il determinante vale 0 se e solo se esiste almeno una riga (o una colonna) che può essere scritta come *combinazione lineare* delle altre due, in simboli:

$$\underline{r}_1 = \alpha \underline{r}_2 + \beta \underline{r}_3$$

(considerando ad es. la prima riga).

2.3 Grazie al determinante costruiamo l'inversa.

La formula per la matrice inversa di ordine 2 è molto semplice:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Notiamo che per una matrice con determinante nullo non possiamo applicare questa formula. Poco male, in effetti. Un sistema la cui matrice incompleta ha determinante nullo può essere risolto molto facilmente. Ricordiamo infatti che le due equazioni sono proporzionali, se escludiamo i termini noti. Introducendo anche questi termini, si presentano due casi. Vediamo due esempi a riguardo.

$$1) \quad \begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 6x - 15y = 13 \end{cases} \quad .$$

Moltiplicando la prima equazione per 3 otteniamo $6x - 15y = 24$. Una tale richiesta è assurda, se confrontata con la seconda equazione. Abbiamo quindi un sistema senza soluzione.

$$2) \quad \begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 6x - 15y = 24 \end{cases} \quad .$$

Come prima, moltiplicando la prima equazione per 3 otteniamo $6x - 15y = 24$. Ora però una tale richiesta è ridondante, inutile, se confrontata con la seconda equazione. Possiamo quindi eliminare un'equazione restando con

$$2x - 5y = 8 \Rightarrow x = 4 + \frac{5}{2}y \ .$$

La y è libera di assumere qualunque valore reale. La x segue le stravaganze della y, adeguandosi. La soluzione generale è

$$y = t \quad , \quad x = 4 + \frac{5}{2}t \quad .$$

Ad es. $[y = 3, x = \frac{23}{2}]$, $[y = 100, x = 254]$, $[y = -40, x = -96]$, ecc.

Si tratta dell'elenco infinito di tutti i punti della retta che nasce dall'intersezione di due rette coincidenti.

Se invece il determinante della matrice incompleta è diverso da 0, ecco che entra in funzione il metodo di Cramer, con l'utilizzo dell'antidoto inverso.

Un discorso analogo vale per i sistemi con matrice incompleta di ordine 3 (dunque abbiamo tre incognite e tre equazioni). La formula della matrice inversa è la seguente (attenzione, adesso, allo scambio degli indici riga-colonna e ai segni disposti a scacchiera!):

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} ,$$

ma cosa rappresentano questi nuovi numeri A_{ij}, oltretutto con gli indici scambiati? Ciascuno di essi è il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene eliminando la riga i e la colonna j.

Esempio:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{45+0+48+0+42+54} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{189} \begin{pmatrix} 87 & 51 & 1 \\ -18 & 9 & 15 \\ 12 & -6 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{29}{63} & \frac{17}{63} & \frac{1}{189} \\ -\frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{5}{63} \\ \frac{4}{63} & -\frac{2}{63} & \frac{11}{189} \end{pmatrix} .$$

Un buon esercizio di allenamento, un po' complicato ma fortificante, consiste nel verificare che il prodotto di questa matrice per la matrice originale, A dà la matrice identità.

Come già visto, possiamo utilizzare questa matrice per risolvere qualunque sistema lineare che abbia la matrice incompleta uguale alla matrice iniziale, nel nostro esempio la matrice A di cui noi calcoliamo l'inversa A^{-1}; in altre parole, possiamo affiancare ad A una colonna qualunque di termini noti.

Ricordiamo che, è disponibile una versione "figurata" del metodo appena visto (la dimostrazione di questa equivalenza di metodi richiederebbe uno strumento ulteriore, il *teorema di Laplace*). Ci riallacciamo così al metodo di Cramer sintetico, già trattato.

Capitolo 3

Un sistema indeterminato... ha infinite soluzioni ben determinate!

3.1 Gli organismi meno evoluti aiutano a capire i più complessi...

Come possiamo comportarci di fronte a una matrice incompleta di ordine 3 che ha determinante nullo? Essa ci impedisce di applicare la regola di Cramer. Forse una tale matrice ci avverte che il sistema non ha soluzione? No, non dobbiamo essere così impulsivi. Se facciamo un passo indietro, lavorando con l'analogia, possiamo ottenere un prezioso insegnamento dal caso dell'ordine 2. Per il momento ripetiamo in una veste più generale quanto visto prima in un esempio particolare.

Se la matrice incompleta di un sistema lineare di due equazioni in due incognite ha determinante nullo, le nostre equazioni hanno la seguente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (ka)x + (kb)y = d \end{cases} .$$

Infatti supponendo che la seconda equazione si presenti nella forma generale $px + qy + d = 0$, abbiamo:

$$0 = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = aq - bp \ \Rightarrow\ \frac{p}{a} = \frac{q}{b} = k \ \exists\, k \in \mathbf{R} \ ,$$

escludendo i casi $a = 0$ o $b = 0$ (in questi casi la proporzionalità vale comunque, perché ad es. se $a = 0$ allora $p = 0$ — esercizio). Notiamo che il simbolo $\exists$ significa "per un certo...", "esiste un..." . Ora succede che il destino di un tale sistema è deciso dai termini noti. Se essi continuano a seguire la proporzionalità dei loro rispettivi coefficienti, dunque se $d = kc$, allora la seconda equazione è *del tutto inutile* perché possiamo dividere i suoi termini per k ottenendo la prima equazione. Abbiamo due richieste che sono identiche, quindi possiamo escludere una delle due senza perdere alcuna informazione. Se invece $d \neq kc$ allora dividendo comunque per k troviamo la nuova equazione

$$ax + by = \frac{d}{k}$$

che insieme alla prima dà un assurdo e blocca il sistema, dato che $\frac{d}{k} \neq c$: siamo dunque in presenza di un sistema senza soluzione.

Tornando alla prima eventualità, invece, il sistema di due equazioni equivalenti consente la fioritura di infinite soluzioni. Infatti, dopo l'eliminazione della seconda equazione, la prima equazione non riesce a produrre un'unica soluzione e lascia spazio per una vastissima libertà di scelta. Possiamo decidere liberamente il valore della x, per poi trovare di conseguenza il valore della y. Dal punto di vista geometrico stiamo cercando l'intersezione tra due rette *coincidenti*, quindi troviamo un'infinità di punti: tutti i punti delle due rette.

Quale insegnamento può darci l'esempio delle due equazioni, rispetto al caso di tre equazioni in tre incognite, con determinante nullo?

Se il determinante è nullo, esiste un'equazione che è... DEL TUTTO INUTILE, ELIMINABILE .

Ma cosa vuol dire essere inutili in un insieme di tre, non due, equazioni? Attenzione, non è detto che un'equazione sia proporzionale a un'altra! Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x + y + z = 8 \\ 4x + 7y - 14z = -1 \end{cases} .$$

Osserviamo che il *vettore numerico* corrispondente alla terza equazione, $\underline{r}_3 = (4, 7, -14, -1)$, è uguale a 3 volte il primo vettore meno 2 volte il secondo:

$$3\underline{r}_1 - 2\underline{r}_2 = 3(2, 3, -4, 5) - 2(1, 1, 1, 8) = (6, 9, -12, 15) - (2, 2, 2, 16) =$$

$$= (6 - 2, 9 - 2, -12 - 2, 15 - 16) = (4, 7, -14, -1) = \underline{r}_3 .$$

Moltiplicare un vettore per un certo numero $\alpha \neq 0$ è sempre lecito perché tale operazione non è altro che la moltiplicazione di una data equazione per α. Si tratta di un'operazione che effettuiamo spesso (pensiamo ad es. a quando eliminiamo un denominatore comune, o quando cambiamo segno a tutti i termini). Anche la somma di più vettori è un'operazione logicamente valida, lecita, perché se due equazioni $E = F$, $E' = F'$ sono soddisfatte, allora è anche soddisfatta l'equazione $E + E' = F + F'$, sommando membro a membro e accorpando i monomi con la stessa incognita. Ad es. sommando le prime due equazioni otteniamo $3x + 4y - 3z = 13$ ma questa operazione non è fruttuosa come invece è l'altra.

Ora, se accade — come nel nostro esempio — che operando su due equazioni ne otteniamo una nuova ma già presente, allora era inutile scrivere sin dall'inizio quest'ultima equazione, dato che essa è soddisfatta *automaticamente* se sono soddisfatte le altre due! Ecco dunque che il nostro sistema in realtà può essere scritto in modo più semplice, mediante due equazioni anziché tre. Resta il problema di trovare l'eventuale combinazione delle due equazioni. Come è stato possible arrivare ai coefficienti 3 e -2 da anteporre a $\underline{r}_1$ e $\underline{r}_2$? Un modo per trovare questi coefficienti è chiedersi se esistono appunto numeri reali p e q tali che

$$p(2, 3, -4, 5) + q(1, 1, 1, 8) = (4, 7, -14, -1) ,$$

arrivando così al sistema (componente per componente, prima le x, poi le y, ecc.)

$$\begin{cases} 2p + q = 4 \\ 3p + q = 7 \\ -4p + q = -14 \\ 5p + 8q = -1 \end{cases} .$$

Otteniamo $q = 4 - 2p$, quindi $3p + (4 - 2p) = 7$ che consente di trovare $p = 3$ e di conseguenza $q = -2$, ma ora dobbiamo controllare che questi due valori soddisfino le ultime due equazioni; ciò in effetti accade, quindi abbiamo i nostri coefficienti.

In generale il metodo appena visto non è molto agevole. Potrebbero esserci molte equazioni, o molte incognite. Tuttavia in linea di principio esso funziona sempre. Certamente, è ridicolo perdere molto tempo nel risolvere un lunghissimo e complicato sistema che aiuterebbe solo parzialmente a risolvere... un altro sistema. Elimineremmo una o più equazioni ma resterebbe ancora un sistema da affrontare, anche se indebolito. Insomma, per facilitare la risoluzione del sistema iniziale saremmo costretti a risolverne un altro. Esiste allora un metodo diverso, più efficiente. Lo abbiamo già incontrato, esso è il metodo di Gauss. Riducendo a gradini il sistema, potrebbe accadere che una o più equazioni *scompaiano*. Le equazioni che scompaiono sono proprio quelle inutili.

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 2x - y - 5z = 4 \\ x - 3y + 25z = 22 \end{cases} .$$

Costruiamo intanto la matrice "incompleta" e quella "completa" — la seconda matrice è l'incompleta con l'aggiunta dell'ultima colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 25 & 22 \end{array}\right) .$$

Ora ripetiamo la procedura descritta precedentemente, mediante la trasformazione di equazioni, mettendo in luce un aspetto combinatorio della matrice che gradualmente si trasforma. Come primo passo, eliminiamo il 2 nella seconda riga. Ciò equivale ad eliminare il monomio con la x nella seconda equazione. Per farlo, utilizziamo la prima riga, $\underline{r}_1$. Sottraiamo dunque alla seconda riga, $\underline{r}_2$, il doppio della prima. In simboli, effettuiamo la sostituzione

$$\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - 2\underline{r}_1 = (2, -1, -5, 4) - (2, -2, 6, 12) = (0, 1, -11, -8) .$$

In parallelo possiamo anche agire sulla terza riga, sempre con l'ausilio della prima che in questo caso viene sottratta senza modifiche:

$$\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \underline{r}_1 = (1, -3, 25, 22) - (1, -1, 3, 6) = (0, -2, 22, 16) .$$

La situazione è per il momento la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -11 & -8 \\ 0 & -2 & 22 & 16 \end{array}\right) \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \diamond & \bullet & \bullet & \bullet \\ \diamond & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Procediamo ora con l'eliminazione di un ulteriore cerchietto nero. Nell'esercizio già svolto avevamo eliminato il cerchietto in basso a sinistra, così da trasformare la terza equazione in una semplicissima equazione nella sola incognita z. Con lo schema recente, fatto di cerchietti e quadratini, possiamo dire che in quella occasione avevamo ottenuto una "scaletta" (capovolta), costituita da tre cerchietti neri. Proviamoci anche ora.

$$\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 + 2\underline{r}_2 = (0, -2, 22, 16) + (0, 2, -22, -16) = (0, 0, 0, 0) .$$

È successo qualcosa di strano... Volevamo eliminare un cerchietto ma in effetti sono scomparsi *tutti* i cerchietti della terza riga! Il secondo gradino della scaletta in realtà si è esteso fino al limite destro. A ben vedere, la seconda riga aveva qualcosa di strano, potevamo notarlo subito: essa era proporzionale alla terza. Ecco perché è accaduto questo fenomeno speciale. La terza equazione era già da prima *inutile*. Come in una partita a scacchi, il suo destino era già segnato e inesorabile, ma occorreva un'ultima mossa per lo scacco matto...

Siamo giunti così alla seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow\!\longleftarrow\!\longrightarrow\!\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \diamond & \bullet & \bullet & \bullet \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{array}\right) .$$

Siamo riusciti a semplificare notevolmente il sistema. Riposizionando le incognite nei rispettivi posti, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ y - 11z = -8 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

L'ultima equazione è... evaporata. Questo da un lato ci tranquillizza, perché il sistema è molto più facile da gestire, ma non possiamo negare che la presenza della terza equazione ci avrebbe aiutato a trovare una soluzione ben determinata, come era successo in un esercizio precedente. Qui, invece, esplicitando ad es. la y, otteniamo

$$y = 11z - 8$$

che potremmo poi sostituire sopra, ottenendo

$$x - (11z - 8) + 3z = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 8z - 2 .$$

La z resta libera. Essa è in effetti un *parametro* e deve *assolutamente* essere lasciata libera. Un indizio della necessità di introdurre un parametro era già presente alla fine della riduzione a scala. Una delle incognite, infatti, non aveva il gradino. Essa, proprio la z, poteva essere spostata al di là del simbolo "=" sin da quel momento, divenendo appunto parametro.

La soluzione finale è quindi

$$x = 8t - 2 \ , \ y = 11t - 8 \ , \ z = t \ .$$

Qualunque valore assegnato alla t produce una specifica soluzione. Ad esempio se $t = 6$ otteniamo

$$x = 46 \ , \ y = 58 \ , \ z = 6 \ .$$

Osserviamo che per altri sistemi la riduzione a scala termina con la presenza di un gradino proprio nell'ultima colonna, quella dei termini noti. Un tale comportamento è il segnale di un sistema impossibile. Riposizionando le incognite otteniamo — nell'equazione coinvolta — un'identità assurda, del tipo $0 = p$ con $p \neq 0$ (altrimenti non ci sarebbe il gradino!).

Capitolo 4

Equazioni di rette e piani.

4.1 Una domanda ingenua...

Cosa sono due rette parallele?

Sono due rette che non hanno punti in comune? Ma allora due strade dirette esattamente a Nord, una passante per Parigi e l'altra per Mosca, sono parallele? Se prolungate, non si incontrano forse al Polo Nord?

La nostra nozione comune di parallelismo dà per scontato che le rette in questione giacciono in un *piano*. Le "rette" di una sfera sono i cerchi massimi (le sezioni con piani passanti per il centro) ed essi hanno sempre due punti di intersezione antipodali. Ovviamente stiamo approssimando la terra con una sfera, ma essenzialmente il concetto vale lo stesso.

Un altro contesto in cui la nozione di parallelismo pone questioni non banali — anche se facilmente gestibili — è la geometria tridimensionale. Se due aerei creano due scie che non si toccano, le loro rotte sono parallele? Certamente no, o quasi mai. A volte le posizioni reciproche di due scie che non si toccano ricordano le mutue posizioni di una strada e di un cavalcavia. Una scia passa sopra all'altra, senza che la intersechi, ma con una direzione perpendicolare. Come chiamare, dunque, queste coppie di rette (o di "rotte" in effetti) che non si toccano pur non essendo parallele, anzi, con direzioni perpendicolari? E come definire esattamente due rette parallele, nello spazio, senza creare un malinteso, senza alludere a situazioni come quella appena vista?

Non occorrono esempi così matematici per descrivere la natura di questo problema. Si tratta di una questione molto più generale che riguarda l'inadeguatezza di una data definizione *al variare del contesto*. Il linguaggio matematico è soltanto uno degli innumerevoli linguaggi in cui possono annidarsi malintesi, difficoltà di comunicazione, problemi di definibilità. Se due abitanti di Roma *non simpatizzano per la stessa squadra di calcio*, cosa deduciamo automaticamente? E se invece due abitanti dell'Italia *non simpatizzano per la stessa squadra di calcio*? Non pensiamo necessariamente alla Lazio e alla Roma. Possiamo dunque dedurre che, presa da sola, una definizione non ha senso, se non specifichiamo il contesto, l'ambiente globale in cui essa si concretizza. Così, se due rette non si incontrano e vivono in un piano, esse sono sicuramente parallele; se vivono nello spazio, non possiamo essere affatto certi del parallelismo.

4.2 Il parallelismo è nascosto nei "vettori direttori".

Nel piano cartesiano Oxy, consideriamo la retta r di equazione $y = 3x$. Essa, come recita la sua legge, è il luogo dei punti che hanno la y tripla della x, quindi si tratta dell'insieme di tutti i punti del tipo $(t, 3t)$ con $t \in \mathbf{R}$. Possiamo mettere in evidenza la t e scrivere $t(1, 3)$ per indicare il punto generico P_t. Ecco che emerge il cosiddetto "vettore direttore", o almeno uno dei vettori direttori (va bene qualunque multiplo non nullo). Possiamo pensare a r come all'insieme di tutti i possibili allungamenti o accorciamenti, anche col verso cambiato, del vettore $\overrightarrow{v}_r = (1, 3)$. Ora, se consideriamo ad es. la retta s di equazione $y = 2x - 5$, essa non è parallela a r perché un suo vettore direttore è $\overrightarrow{v}_s = ...$ uguale a cosa?

Per poter rispondere è bene traslare s sull'origine, facendo quindi scomparire il termine noto -5. Operando così otteniamo, infatti, la retta parallela a s e passante per l'origine. A questo punto possiamo analizzare di nuovo il punto mobile Q_t e avremo che $Q_t = (t, 2t)$. Dunque $\overrightarrow{v}_s = (1, 2)$.

Una delle comodità nell'utilizzo dei punti mobili è l'analogia della scrittura se passiamo dalla geometria piana a quella tridimensionale. Infatti i vettori dello spazio sono come i vettori del piano, con la sola aggiunta della terza componente. Nel caso tridimensionale il vettore non corrisponde più alla diagonale di un rettangolo, ma alla diagonale di una parallelepipedo (con la freccia su un estremo). Passiamo da un foglietto a un mattone, ma dobbiamo pur sempre considerare la diagonale, cioè il segmento che congiunge due vertici "opposti" attraversando la materia cartacea o quella argillosa in *tutta la sua profondità*, passando anche per il baricentro, il punto centrale del foglietto o del mattone (attenzione infatti a non disegnare il vettore su una *faccia* del mattone).

Un vettore dello spazio è ad esempio $\overrightarrow{v} = (4, 3, 2)$. Il mattone in questione ha le dimensioni uguali a 4, 3, 2 rispettivamente. La lunghezza di questo vettore è $\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ (esercizio: applicare un "doppio teorema di Pitagora", prima su una faccia per trovare la diagonale della faccia, poi internamente...). Come già accennato, il punto mobile sulla retta che attraversa il mattone, e che inoltre passa per l'origine, è $(4t, 3t, 2t)$. Una retta parallela avrà un vettore direttore uguale (o proporzionale) a $(4, 3, 2)$. Ma qual è l'equazione della prima retta o di quella parallela? La domanda è... posta male, sbagliata!

Una retta nello spazio è descritta da due equazioni; una non basta.

4.3 Nello spazio, una retta esige due equazioni, non una.

Vediamo perché non è sufficiente una sola equazione. Torniamo alla geometria del piano. Partendo dal punto mobile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} ,$$

possiamo assorbire la t per poi fondere le due equazioni parametriche: $t = x$, quindi $y = 3t = 3x$ ed ecco subito l'equazione cartesiana $y = 3x$. Siamo tornati indietro; abbiamo fatto quindi un viaggio di andata e ritorno, passando dall'equazione cartesiana alle equazioni parametriche, e viceversa. Proviamo ora a fare lo stesso ragionamento col punto mobile tridimensionale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} .$$

Fissiamo l'attenzione ad es. su $z = 2t$, deducendo che

$$t = \frac{z}{2} .$$

Come spendiamo questa uguaglianza? Restano ancora *due* equazioni da trattare. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x = 4t = 4\frac{z}{2} = 2z \\ \\ y = 3t = 3\frac{z}{2} = \frac{3}{2}z \end{cases} .$$

Aggiustando un po' la seconda equazione e dando un tocco estetico finale, possiamo concludere che *le* equazioni della nostra retta sono

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} .$$

4.4 Il prodotto scalare e i piani nello spazio.

Cosa rappresenta una singola equazione cartesiana in tre incognite? Poiché un sistema esprime l'intersezione degli enti geometrici che soddisfano le varie equazioni presenti, e dato che nella geometria dello spazio una retta nasce da due equazioni, essa è l'intersezione dei due enti geometrici descritti da tali equazioni. Sarebbe molto naturale immaginare questi due enti come due piani che — come pagine di un libro — hanno una retta in comune — la rilegatura. In effetti è proprio così:

Un'equazione lineare in tre incognite rappresenta un PIANO.

Ci sono tanti modi per dimostrarlo. Uno di questi ricorre al cosiddetto *prodotto scalare*. Si tratta di una operazione tra due vettori il cui risultato è appunto un numero reale, uno "scalare" (questo termine è legato agli ingrandimenti o alle riduzioni *in scala*). Calcolare un prodotto scalare è estremamente facile, basta sommare i prodotti delle componenti. Ad esempio

$$(3, 4, 5) \cdot (2, -1, 4) = 3 \cdot 2 + 4(-1) + 5 \cdot 4 = 22 \ .$$

Questo gioco di numeri tanto elementare nasconde in realtà una proprietà inaspettata e fondamentale. Vale infatti il seguente teorema, che non dimostriamo.

$$\textbf{Teorema}: \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \cos\theta \ ,$$

dove le due sbarrette indicano la lunghezza del vettore e θ è l'angolo formato dai due vettori (applicati nel medesimo punto). Il teorema è valido anche per il caso bidimensionale, dove le componenti sono soltanto due (nel teorema basta porre l'ultima componente uguale a 0).

Con questo teorema in mente possiamo dedurre, in particolare, che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Infatti il coseno di un angolo vale 0 esattamente nel caso di un angolo retto.

Torniamo ora all'equazione lineare in tre incognite, supponendo inizialmente che non sia presente il termine noto. Se abbiamo ad es. $3x + 2y - 6z = 0$, possiamo riscriverla come

$$(3, 2, -6) \cdot (x, y, z) = 0 \ ,$$

interpretando quindi l'equazione iniziale come una *condizione di perpendicolarità*: il vettore (x, y, z) deve essere *ortogonale* al vettore $\underline{n} = (3, 2, -6)$. Osserviamo, adesso, che un vettore applicato nell'origine è una freccia che ha come altro estremo proprio il punto (x, y, z) che risolve l'equazione. Quindi il luogo dei vettori ortogonali al vettore $\overrightarrow{n}$ può essere interpretato in due modi:

1) Un insieme di vettori i cui estremi coprono un piano.
2) Un insieme di punti, dunque i punti del piano.

In conclusione, l'equazione $3x + 2y - 6z = 0$ rappresenta tutti i punti di un piano passante per l'origine e ortogonale al vettore $(3, 2, -6)$.

Se aggiungiamo un termine noto, ad es. considerando l'equazione $3x + 2y - 6z + 12 = 0$, stiamo semplicemente *traslando* il nostro piano. Infatti riscrivendo l'equazione in forma esplicita come

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 2 \ ,$$

otteniamo una funzione di due variabili $z = z(x, y)$ che è la stessa della precedente ad eccezione dell'incremento di 2 lungo l'asse z. Dunque tutti i punti del grafico tridimensionale della funzione $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ (il vecchio piano) vengono spostati in alto di 2.

Capitolo 5

Autovettori e diagonalizzazione.

Le matrici quadrate di ordine 2 possono essere interpretate come funzioni dal piano cartesiano a se stesso. Dunque il dominio e il codominio possono essere identificati con lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$. Notiamo che $\mathbf{R}^1$ è anch'esso uno spazio vettoriale ma le matrici che esprimono funzioni da $\mathbf{R}^1$ a se stesso sono poco "interessanti" (anche se costituiscono il prototipo delle cosiddette applicazioni lineari). Abbiamo infatti soltanto funzioni del tipo $y = \alpha x$, per qualunque numero reale α fissato.

Nelle colonne di una matrice quadrata di ordine 2 risiedono tutte le informazioni che consentono di descrivere il comportamento geometrico della relativa funzione. Data ad esempio la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} ,$$

essa dà luogo a una funzione — denotiamola f — che è completamente determinata dalle immagini dei vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Calcoliamole:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Si tratta appunto delle due colonne che formano la matrice.

Se ora però ci concentriamo sulle *direzioni* del vettore iniziale e della sua immagine secondo f, in entrambi i casi notiamo che esse vengono modificate. Sarebbe stato piacevole vederle inalterate, perché un tale fenomeno avrebbe consentito una rappresentazione grafica — e mentale — molto naturale della funzione f in esame. Se ad es. l'immagine di $(1, 0)$ fosse stata $(4, 0)$ e quella di $(0, 1)$ fosse stata $(0, 7)$, avremmo potuto visualizzare facilmente la nostra funzione: essa non sarebbe stata altro che una *variazione di scala* lungo le due direzioni degli assi x e y, rispettivamente con un fattore 4 e 7 (attenzione, 4 e 7 sono soltanto un esempio). Interpretando il dominio come un infinito foglio a quadretti, un quadretto sarebbe diventato un rettangolo nel codominio, con dimensioni amplificate di 4 e 7 rispettivamente. Una circonferenza sarebbe diventata un'ellisse. Un gattino sarebbe diventato un gatto più lungo e relativamente più alto rispetto alle dimensioni iniziali, ma non avremmo avuto difficoltà nell'immaginarlo.

Per evitare tutti questi lunghi e farraginosi verbi al condizionale, un modo esiste. Esiste infatti una coppia di vettori che traduce in realtà le nostre aspettative. Esiste una coppia di direzioni *privilegiate* che restano se stesse nel passaggio dal dominio al codominio: sono le direzioni identificate dai vettori $(1, 1)$ e $(1, 4)$. Infatti notiamo che $f(1, 1) = (3, 3)$ (quindi tre volte il vettore iniziale) e $f(1, 4) = (6, 24)$ (sei volte il vettore iniziale). Sebbene questi due vettori identifichino direzioni non perpendicolari tra loro, con un po' di "elasticità" possiamo sempre collocare due nuovi assi, X e Y lungo le nuove direzioni (attenzione all'uso di lettere diverse dalle x, y). In questo modo il dominio non verrà suddiviso più in quadretti unitari, bensì in *parallelogrammi elementari*. Ma è decisamente meglio partire con parallelogrammi che poi si amplificano di 3 e di 6 lungo i nuovi assi, restando sempre parallelogrammi *con gli stessi angoli*, anziché partire con quadretti molto semplici che però nel codominio si deformano perdendo completamente le proprie fattezze (vedere la figura più avanti).

Al di là dell'interesse geometrico, sintonizzarsi su questi nuovi assi comporta un chiarissimo vantaggio algebrico. Infatti la matrice che rappresenta f ora è molto più snella. Nelle sue colonne, lo ricordiamo, devono comparire le immagini dei vettori iniziali. Ma esse sono semplici *allungamenti* di quei vettori. Sull'asse X, il nuovo vettore $(1,0)$ registra un allungamento di 3, mentre il nuovo $(0,1)$ si allunga di 6. Attenzione tuttavia al concetto di "nuovo vettore"! Probabilmente senza rendercene conto, abbiamo dato per scontato un fatto essenziale: qui in realtà non dovremmo parlare di vecchi vettori e nuovi vettori, ma di vecchie e nuove "coordinate" rispetto a una base che — essa sì — è costituita da due vettori geometrici e cambia da vecchia a nuova. Infatti in questo nuovo contesto $(0,1)$ rappresenta il vettore che giace lungo uno dei lati del parallelogramma elementare nel nuovo foglio a quadretti... anzi a "parallelogrammetti"; questo vettore occupa il lato corrispondente alla direzione data dal vettore $(1,1)$, quindi di fatto esso è il vettore $(1,1)$.

Più in dettaglio, le coordinate $(1,0)$ devono essere tradotte come 1 per $(1,1)$ più 0 per $(1,4)$. Similmente, quando scriviamo $(0,1)$ come sopra, dovremmo interpretare questa coppia di numeri come il vettore $(1,4)$ che occupa l'altro lato del parallelogramma elementare. Qui abbiamo: $(1,4) = 0(1,1)+1(1,4)$. Ecco dunque che le colonne della nuova matrice sono "coordinate", non componenti di vettori. A ben vedere, ciò vale anche per la matrice iniziale. Le sue colonne, $(2,-4)$ e $(1,7)$, sono certamente le rispettive immagini di $(1,0)$ e $(0,1)$, ma tutte queste coppie di numeri *non hanno alcun riscontro reale* se non precisiamo la base soggiacente, se non specifichiamo che tipo di quadrettatura o "parallelogrammettatura" o comunque che tipo di "reticolo" stiamo utilizzando. La base che sottintendiamo per la matrice iniziale è costituita da due versori che danno vita al foglio a quadretti. Questa base soggiacente ha un ruolo fondamentale. Se diamo un'indicazione stradale come ad esempio "vada avanti per 20 metri e poi percorra 35 metri a destra", dobbiamo associare a questi numeri un gesto che comunichi la *direzione* lungo la quale devono essere percorsi i 20 metri; successivamente, anche andare a destra presupporrà una direzione perpendicolare (e un verso), come in un foglio quadrettato.

In sintesi: le coordinate da sole non significano niente, se non vengono ancorate a una base di vettori veri e propri; soltanto in quel momento esse diventano informazioni valide. Similmente, ad es. la parola MORE non significa nulla se non specifichiamo la lingua soggiacente: inglese o italiano?

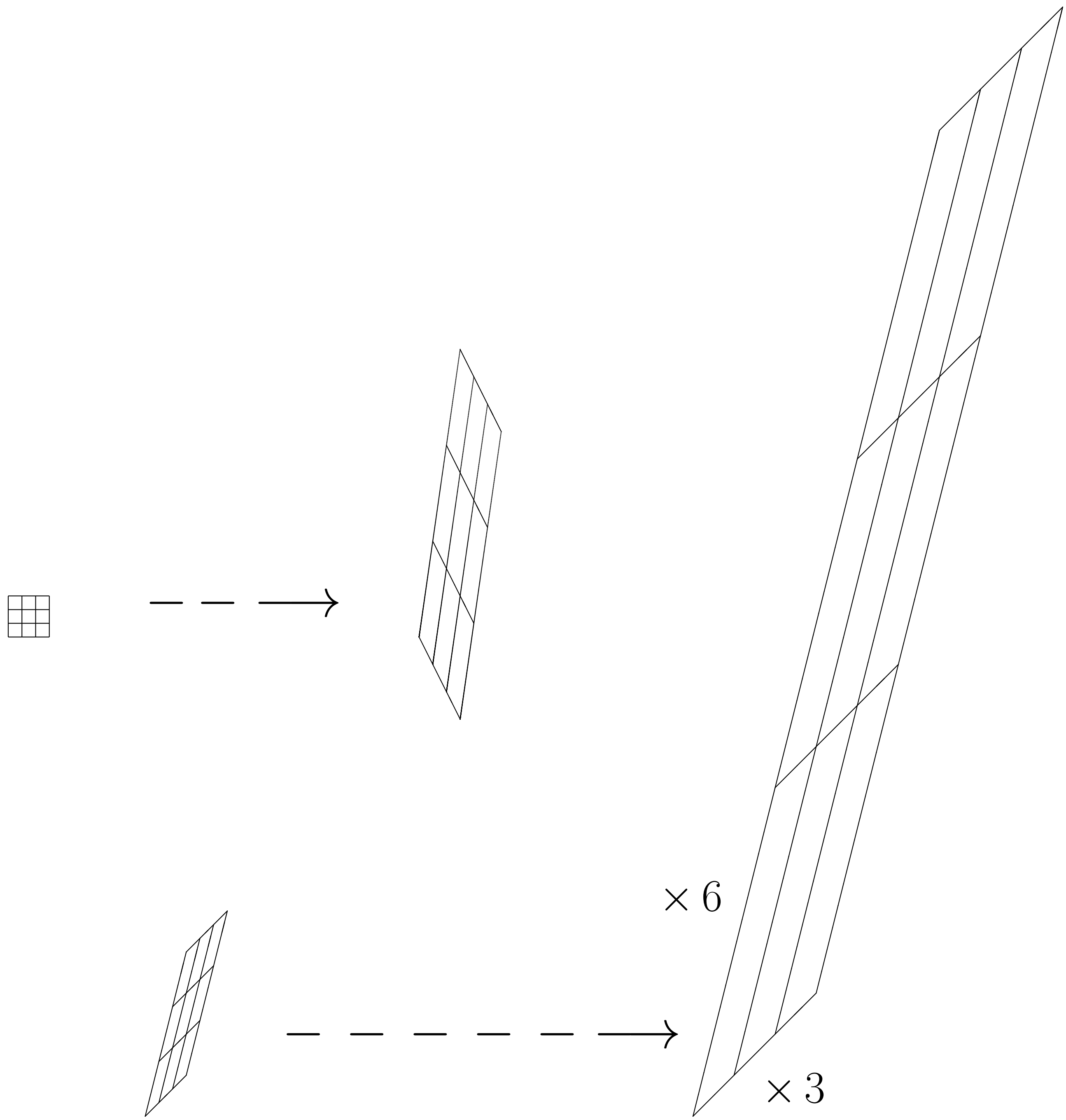
I vettori che indicano le direzioni privilegiate si dicono **autovettori**. I fattori di deformazione sono invece gli **autovalori**. Per trovare gli autovettori basta chiedersi quali sono i vettori (α,β) (non nulli) che soddisfano la seguente proprietà:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ,$$

dove λ è un numero reale qualunque, eventualmente uguale a zero. Infatti l'allungamento di zero volte è, in altri termini, il collasso lungo la direzione relativa a questo autovettore: un piano diventa una retta (la direzione relativa all'altro autovettore).

Tornando alla ricerca degli autovettori, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = \lambda\alpha \\ -4\alpha + 7\beta = \lambda\beta \end{cases} , \text{ equivalente a } \begin{cases} (2-\lambda)\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha + (7-\lambda)\beta = 0 \end{cases} .$$



In realtà non stiamo soltanto risolvendo un sistema; prima di risolverlo dobbiamo riflettere su quali siano i valori opportuni di λ che consentiranno una risoluzione soddisfacente. Infatti è chiaro che questo sistema ammette sempre la soluzione banale $\alpha = \beta = 0$, ma noi vogliamo ulteriori soluzioni. L'unico modo per far fiorire nuove soluzioni è imporre che il determinante

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

sia nullo. Soltanto in questo modo eviteremo l'unicità della soluzione (l'unica soluzione sarebbe inevitabilmente quella nulla).

Un altro modo di arrivare alla stessa conclusione è imporre che le due equazioni siano equivalenti, abbiano quindi i coefficienti proporzionali. Soltanto in questo modo una di esse scomparirebbe lasciando spazio per un parametro, quindi per ulteriori soluzioni al di là di quella nulla.

Passiamo ai calcoli. Abbiamo:

$$(2-\lambda)(7-\lambda)+4=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-9\lambda+18=0 \;\Rightarrow \lambda=3 \;\vee\; \lambda=6 \; .$$

Abbiamo stanato gli autovalori. Ora ciascuno di essi produrrà il suo autovettore. Per $\lambda = 3$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha+\beta=0 \\ -4\alpha+4\beta=0 \end{cases} ,$$

che conferma l'esattezza dei calcoli precedenti: una delle due equazioni è infatti inutile ed il sistema ammette la soluzione generale (t,t) da cui possiamo prelevare l'autovettore $(1,1)$. Similmente, per $\lambda = 6$ il sistema produce la soluzione $(t,4t)$ da cui possiamo prelevare l'autovettore $(1,4)$.

La matrice C che ha gli autovettori come colonne è uno strumento importantissimo: essa consente di *diagonalizzare* la matrice iniziale M. Vediamo i dettagli. Moltiplicando queste due matrici otteniamo:

$$MC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 24 \end{pmatrix} ,$$

come sappiamo bene; le colonne della seconda matrice sono infatti autovettori e li ritroviamo, amplificati di 3 e di 6, nelle colonne della matrice risultante. Proprio in virtù della proprietà che caratterizza gli autovettori ($f(\underline{u}) = \lambda\underline{u}$), e con l'aiuto di una matrice diagonale D ad hoc, possiamo ora leggere quest'ultima matrice come

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} ,$$

quindi finora abbiamo dimostrato che $MC = CD$. Ora, moltiplicando a sinistra per l'inversa di C otteniamo

$$C^{-1}MC = C^{-1}CD = D \; .$$

Attenzione, nel primo prodotto non è ancora possibile porre C^{-1} accanto a C per poi eliminarle; invece il secondo prodotto "espone" la C all'attacco dell'inversa a sinistra. (Ricordiamo che in genere non vale la commutatività per il prodotto di matrici.)

In conclusione, abbiamo dimostrato che esiste una matrice C tale che

$$C^{-1}MC = D \; .$$

La matrice D contiene gli autovalori sulla diagonale principale, mentre tutti gli altri suoi posti sono occupati da zeri.

Questo approccio, esclusivamente algebrico, può essere riletto in chiave geometrica, interpretando le matrici C e C^{-1} come *matrici del cambiamento di coordinate* dalla base di autovettori alla base canonica, e viceversa.