

1. Un v. a. discreto (X, Y) ha come codominio l'insieme $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$, con $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{2}$ e con $P(X = x, Y = y) = a$ per ogni $(x, y) \neq (2, 0)$. Calcolare la costante a e stabilire se i numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$$a = \qquad \qquad \qquad \text{Stocast. indep. ?}$$

2. Sia R il rettangolo $[0, 1] \times [0, 2]$. La densità congiunta di un v. a. continuo (X, Y) è $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in R$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(Y - X \leq 1) | (X + Y > 1)$.

$$p =$$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $U = X + Y$, $V = Y - X$, calcolare la covarianza dei numeri aleatori U e V .

$$\sigma_{UV} =$$

4. Da due lotti A e B , costituiti ciascuno da 3 pezzi buoni e 1 difettoso, si prelevano a caso 2 pezzi formando un terzo lotto C di 4 pezzi. Calcolare la probabilità condizionata γ che i 4 pezzi di C siano tutti buoni, supposto che due pezzi prelevati a caso da C siano risultati entrambi buoni (evento E).

(N.B.: indicare con X (risp. Y) il numero di pezzi difettosi prelevati da A (risp., da B); indicare inoltre con H_r l'evento $(X + Y = r)$, $r = 0, 1, 2$).

$$\gamma =$$

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. e Terr. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 13/9/2008.

1. Essendo: $4a + \frac{1}{2} = 1$, segue: $a = \frac{1}{8}$. Inoltre: $X \in \{0, 1, 2\}$, $Y \in \{0, 1\}$, con

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{2}; \quad P(Y = 0) = \frac{3}{4}, \quad P(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

Allora, osservando ad esempio che: $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = P(X = 2)P(Y = 0)$, risulta che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

2. Si ha

$$P(X+Y > 1) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 xy dy = \int_0^1 x \left[2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \dots = \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{23}{24};$$

$$P(Y - X \leq 1, X + Y > 1) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{x+1} xy dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^{x+1} dx = \dots = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Pertanto: } p = P[(Y - X \leq 1) | (X + Y > 1)] = \frac{P(Y-X \leq 1, X+Y > 1)}{P(X+Y > 1)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{23}{24}} = \frac{16}{23}.$$

3. Si ha

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 x f_1(x) dx = \int_0^1 \int_0^2 x f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 x^2 y dx dy = \dots = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1(x) dx = \int_0^1 \int_0^2 x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 x^3 y dx dy = \dots = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^2 y f_2(y) dy = \int_0^1 \int_0^2 y f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 xy^2 dx dy = \dots = \frac{4}{3},$$

$$\mathbb{P}(Y^2) = \int_0^2 y^2 f_2(y) dy = \int_0^1 \int_0^2 y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 xy^3 dx dy = \dots = 2.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sigma_{UV} &= \mathbb{P}(UV) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(Y^2 - X^2) - [\mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)][\mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X)] = \\ &= \mathbb{P}(Y^2) - \mathbb{P}(X^2) + [\mathbb{P}(X)]^2 - [\mathbb{P}(Y)]^2 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{16}{9} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. Si ha

$$P(H_0) = P(X + Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$P(H_2) = P(X + Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(H_1) = P(X+Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) = 1 - P(H_0) - P(H_2) = \frac{1}{2};$$

$$P(E | H_0) = 1, \quad P(E | H_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}, \quad P(E | H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Allora, applicando il teorema di Bayes, si ottiene

$$\gamma = P(H_0 | E) = \frac{P(E | H_0)P(H_0)}{P(E | H_0)P(H_0) + P(E | H_1)P(H_1) + P(E | H_2)P(H_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{6}{13}.$$