

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina - 9/9/2009)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sia D il parallelogramma di vertici i punti $(0, 0), (2, 1), (2, 3), (0, 2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = kxy$, per $(x, y) \in D$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la previsione di X .

$$k = \qquad \qquad \qquad \mathbb{P}(X) =$$

2. Siano E_1, E_2, E_3 tre eventi indipendenti ed equiprobabili, di probabilità $p > 0$. Posto $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_2 \vee E_3$, $C = E_1 \vee E_3$, calcolare la probabilità α dell'evento intersezione ABC e stabilire se è corretta l'affermazione: $P(A|B) > \frac{1}{2}$, $\forall p \in (0, 1]$.

$$\alpha = \qquad \qquad \qquad P(A|B) > \frac{1}{2}, \forall p \in (0, 1] \text{ ?}$$

3. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Posto $Y = 2X + 1$, calcolare la funzione caratteristica e la previsione di Y .

$$\varphi_Y(t) = \qquad \qquad \qquad \mathbb{P}(Y) =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(Y \leq 1) | (-3 \leq Y \leq 3)$.

$$p =$$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-x-y}$, per $y \geq 0, x \geq 2y$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di rischio $h_2(y)$ del numero aleatorio Y .

$$h_2(y) =$$

6. Le componenti di un vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_4)$ sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri $0, 2$. Posto $Y_i = \frac{X_i}{2}$, $i = 1, \dots, 4$; $\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_4}{4}$, calcolare la probabilità α dell'evento $(-1 \leq \bar{Y} \leq 1)$.

$$\alpha =$$

7. Un operatore tecnico, che ha a disposizione un lotto di $r + 2$ componenti, non ricorda più quale delle seguenti due ipotesi è quella vera: $H = \text{"nel lotto ci sono } r \text{ componenti buoni e } 2 \text{ difettosi"}$; $H^c = \text{"nel lotto ci sono } 2 \text{ componenti buoni ed } r \text{ difettosi"}$. Considerando equiprobabili le due ipotesi, l'operatore decide di esaminare un componente preso a caso dal lotto. Supposto di aver osservato l'evento $E = \text{"il componente estratto a caso è buono"}$, calcolare (condizionatamente ad E) per quali valori di r l'ipotesi H risulta più probabile dell'ipotesi H^c .

$$r \in$$

1. La retta passante per i punti $(0, 0)$, $(2, 1)$ ha equazione $y = \frac{x}{2}$, mentre la retta passante per i punti $(0, 2)$, $(2, 3)$ ha equazione $y = \frac{x}{2} + 2$. Allora, essendo

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = k \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+2} xy dx dy = \dots = \frac{20}{3} k = 1,$$

segue: $k = \frac{3}{20}$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+2} \frac{3}{20} xy dy = \dots = \frac{3}{20} (x^2 + 2x), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_1(x) dx = \dots = \frac{3}{20} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \dots = \frac{7}{5}.$$

2. Osservando che $AB = (E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3) = (E_1 E_3 \vee E_2)$, si ha

$$\alpha = P(ABC) = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3) \wedge (E_1 \vee E_3)] =$$

$$= P[(E_1 E_3 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_3)] = \dots = P(E_1 E_2 \vee E_1 E_3 \vee E_2 E_3) = \dots = 3p^2 - 2p^3.$$

Inoltre, osservando che $p - p^2 > 0 \quad \forall p \in (0, 1]$, segue

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(E_1 E_3 \vee E_2)}{P(E_2 \vee E_3)} = \frac{p^2 + p - p^3}{2p - p^2} = \frac{1 + p - p^2}{2 - p} > \frac{1}{2 - p} > \frac{1}{2}, \quad \forall p \in (0, 1].$$

3. Si ha

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{P}(e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{it(2X+1)}) = e^{it} \mathbb{P}(e^{i(2t)X}) = e^{it} \varphi_X(2t) = e^{it-2t^2}.$$

Inoltre

$$\varphi'_Y(t) = (i - 4t)e^{it-2t^2}, \quad \varphi'_Y(0) = i = i \mathbb{P}(Y);$$

pertanto: $\mathbb{P}(Y) = 1$.

4. Ricordiamo che $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ è la funzione caratteristica di una distribuzione normale standard; inoltre, essendo $Y = 2X + 1$, l'evento condizionato $(Y \leq 1) | (-3 \leq Y \leq 3)$ coincide con l'evento condizionato $(X \leq 0) | (-2 \leq X \leq 1)$. Pertanto

$$\begin{aligned} p &= P[(Y \leq 1) | (-3 \leq Y \leq 3)] = P[(X \leq 0) | (-2 \leq X \leq 1)] = \frac{P(-2 \leq X \leq 0)}{P(-2 \leq X \leq 1)} = \\ &= \frac{\Phi(0) - \Phi(-2)}{\Phi(1) - \Phi(-2)} = \frac{\Phi(0) + \Phi(2) - 1}{\Phi(1) + \Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.5 + 0.9772 - 1}{0.8413 + 0.9772 - 1} = \frac{0.4772}{0.8185} \simeq 0.583. \end{aligned}$$

5. Si ha

$$f_2(y) = \int_{2y}^{+\infty} 3e^{-x-y} dx = 3e^{-y} \int_{2y}^{+\infty} e^{-x} dx = 3e^{-y} e^{-2y} = 3e^{-3y}, \quad y \geq 0,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove (*distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$*). Pertanto, per ogni $y > 0$, si ha

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} 3e^{-3t} dt = e^{-3y}; \quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{3e^{-3y}}{e^{-3y}} = 3.$$

6. Si ha $Y_i \sim N_{0,1}$, $i = 1, \dots, 4$; inoltre, essendo una combinazione lineare di numeri aleatori indipendenti e con distribuzione normale, $\bar{Y}$ ha una distribuzione normale, di parametri $\bar{m}, \bar{\sigma}$, con

$$\bar{m} = \mathbb{P}(\bar{Y}) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_4}{4}\right) = 0, \quad \bar{\sigma}^2 = \text{Var}(\bar{Y}) = \frac{\text{Var}(Y_1) + \dots + \text{Var}(Y_4)}{16} = \frac{1}{4}.$$

Pertanto $\bar{Y} \sim N_{0, \frac{1}{2}}$. Allora, osservando che $Z = \frac{\bar{Y}-0}{\frac{1}{2}} = 2\bar{Y}$ ha una distribuzione normale standard e ricordando che $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$\alpha = P(-1 \leq \bar{Y} \leq 1) = P(-2 \leq 2\bar{Y} \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544.$$

7. Si ha

$$P(E|H) = \frac{r}{r+2}, \quad P(E|H^c) = \frac{2}{r+2}, \quad P(E) = \frac{r}{r+2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{r+2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

pertanto

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{r}{r+2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{r}{r+2}; \quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = \frac{2}{r+2}.$$

Allora

$$P(H|E) > P(H^c|E) \iff \frac{r}{r+2} > \frac{2}{r+2} \iff r \in \{3, 4, \dots, n, \dots\}.$$