

Probabilità e Statistica (17/07/2010)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 4. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 4 studenti (scelto a caso). Siano definiti gli eventi $H_r =$ "fra i 4 studenti estratti a caso ve ne sono r che sanno risolvere il quesito", $r = 0, 1, 2$; $A =$ "lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito". Supposto vero A , calcolare la probabilità condizionata p che solo uno dei rimanenti 3 studenti sappia risolvere il quesito.

$$p =$$

2. Da un'urna, contenente inizialmente 4 palline bianche e 4 nere, si effettuano 3 estrazioni a caso, togliendo ogni volta una pallina e sostituendola con una di colore opposto. Definiti gli eventi $E_i =$ "l' i -ma pallina estratta è bianca", $i = 1, 2, 3$, stabilire se gli eventi intersezione E_1E_2 , E_1E_3 ed E_2E_3 sono equiprobabili.

$$E_1E_2, E_1E_3, E_2E_3 \text{ equiprobabili?}$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k , la previsione di X e la previsione di Y .

$$k = \quad \quad \quad \mathbb{P}(X) = \quad \quad \quad \mathbb{P}(Y) =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono incorrelati e calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y \leq 3)$.

$$X, Y \text{ incorrelati?} \quad \quad \quad p =$$

5. Con riferimento all'esercizio 2, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

$$\varphi(t) =$$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per ogni $z > 0$.

$$h_Z(z) =$$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0, \sigma_0 = 4$. Le componenti di un campione casuale (X_1, \dots, X_4) , subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ , hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_4)$, con $x_1 + \dots + x_4 = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(-\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 | \mathbf{x}) = 2\Phi(1) - 1$.

$$\theta_0 =$$

1. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{4-r}}{\binom{6}{4}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{4}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{15}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{8}{15}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{6}{15};$$

inoltre: $P(A|H_0) = 1$, $P(A|H_1) = \frac{3}{4}$, $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$. Allora

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} = \frac{2}{3};$$

pertanto: $p = P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

2. Si ha $P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$; inoltre

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3), \quad P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3),$$

con

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{64},$$

$$P(E_1E_2^cE_3) = P(E_1)P(E_2^c|E_1)P(E_3|E_1E_2^c) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{10}{64},$$

$$P(E_1^cE_2E_3) = P(E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{10}{64};$$

quindi: $P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{3}{64} + \frac{10}{64} = \frac{13}{64} \neq \frac{3}{16}$; pertanto gli eventi E_1E_2 , E_1E_3 ed E_2E_3 non sono equiprobabili.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = k \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-x-y} dy = 1$; quindi

$$k \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y} dy = \dots = k \int_0^{+\infty} e^{-x} dx - \frac{2}{3} k \int_0^{+\infty} \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx = k \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{k}{3} = 1;$$

pertanto: $k = 3$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} 3e^{-x-y} dy = 3e^{-x} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y} dy = 3e^{-x}(1 - e^{-\frac{x}{2}}), \quad x \geq 0,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} 3xe^{-x}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) dx = 3 \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx = 3 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Infine

$$f_2(y) = \int_{2y}^{+\infty} 3e^{-x-y} dx = 3e^{-y} \int_{2y}^{+\infty} e^{-x} dx = 3e^{-3y}, \quad y \geq 0,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove; ovvero, Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$; quindi: $\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{3}$.

4. Osservando che $\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$, $\forall \lambda > 0$,

$$\int_0^{\frac{x}{2}} ye^{-y} dy = [-ye^{-y}]_0^{\frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y} dy = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}},$$

segue

$$\begin{aligned} P(XY) &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x}{2}} 3xye^{-x-y} dy = \int_0^{+\infty} \left(3xe^{-x} \int_0^{\frac{x}{2}} ye^{-y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} 3xe^{-x} \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right) dx = \\ &= 3 \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx - \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx = 3 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{7}{9} \neq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(X)P(Y); \end{aligned}$$

quindi X e Y sono correlati.

Inoltre, osservando che l'evento $(X + Y \leq 3)$ coincide con l'evento $(X, Y) \in A$, dove $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq 3 - y\}$, segue

$$\begin{aligned} p &= P[(X, Y) \in A] = \int \int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^{3-y} 3e^{-x-y} dx = \int_0^1 \left(3e^{-y} \int_{2y}^{3-y} e^{-x} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 3e^{-y} (e^{-2y} - e^{-3+y}) dx = \int_0^1 3e^{-3y} dy - 3e^{-3} \int_0^1 dx = 1 - 3e^{-3} - 3e^{-3} = 1 - 4e^{-3}. \end{aligned}$$

5. Si ha $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, con $P(X = 0) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{64} = P(E_1 E_2 E_3) = P(X = 3)$; inoltre,

$$P(X = 1) = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) + P(E_1^c E_2^c E_3) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{29}{64},$$

$$P(X = 2) = P(E_1 E_2 E_3^c) + P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2 E_3) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{29}{64}.$$

$$\text{Pertanto: } \varphi(t) = \sum_{h=0}^3 p_h e^{itx_h} = \frac{3+29e^{it}+29e^{2it}+3e^{3it}}{64}.$$

6. Fissato $z > 0$, si ha $h_Z(z) = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)}$, con $S_Z(z) = 1 - F_Z(z)$ e con

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P(Y \leq z - X) = P[(X, Y) \in A],$$

dove $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{z}{3}, 2y \leq x \leq z - y\}$. Pertanto

$$F_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{3}} dy \int_{2y}^{z-y} 3e^{-x-y} dx = \int_0^{\frac{z}{3}} 3e^{-y} (e^{-2y} - e^{-z+y}) dy = \int_0^{\frac{z}{3}} 3e^{-3y} dy - 3e^{-z} \int_0^{\frac{z}{3}} dy = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

Allora $S_Z(z) = e^{-z} + ze^{-z}$, $S'_Z(z) = -e^{-z} + e^{-z} - ze^{-z} = -ze^{-z}$; pertanto, per ogni $z > 0$, si ha: $h_Z(z) = \frac{ze^{-z}}{e^{-z} + ze^{-z}} = \frac{z}{1+z}$.

7. Si ha $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{m_4, \sigma_4}$, con $m_4 = 0$ in quanto $\bar{x} = m_0 = 0$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$ e quindi $\sigma_4 = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Pertanto $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{0, \frac{4}{\sqrt{17}}}$. Allora

$$\begin{aligned} P(-\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 | \mathbf{x}) &= \Phi_{0, \frac{4}{\sqrt{17}}}(\theta_0) - \Phi_{0, \frac{4}{\sqrt{17}}}(-\theta_0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\theta_0\right) - 1 = 2\Phi(1) - 1 \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) = \Phi(1) \iff \frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0 = 1 \iff \theta_0 = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sigma_4. \end{aligned}$$