Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 28/1/2011)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0,0), (-1,-2), (-1,2), (2,-1), (2,1)\}$. Considerato il numero aleatorio $Z = X^2 - Y^2$, determinare: (i) il codominio C_Z di Z; (ii) la covarianza di X, Z; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z \leq 0 \,|\, Y \geq 0)$.

   $C_Z =$ $\qquad$ $Cov(X, Z) =$ $\qquad$ $p =$

2. Per andare in una località Tizio deve prendere un autobus, impiegando un tempo aleatorio (in ore) X, e poi un treno, impiegando un tempo aleatorio Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = k$, per $(x, y) \in R = [1, 2] \times [3, 5]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k, la previsione μ e lo scarto standard σ del tempo aleatorio totale $Z = X + Y$.

   $k =$ $\qquad$ $\mu =$ $\qquad$ $\sigma =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare $Cov(X + Y, X - Y)$ e la probabilità condizionata $p = P(Y \leq X + 3 \,|\, X + Y > 5)$.

   $Cov(X + Y, X - Y) =$ $\qquad$ $p =$

4. Da un lotto contenente 4 pezzi (2 difettosi e 2 buoni) si elimina a caso un pezzo; successivamente vengono prelevati a caso (senza restituzione) altri due pezzi. Definiti gli eventi $H =$*"il pezzo eliminato dal lotto è buono"*, $A =$ *"il primo dei due pezzi prelevati dal lotto è buono"*, $B =$ *"il secondo dei due pezzi prelevati dal lotto è buono"*, calcolare la probabilità p dell'evento $A^c B^c H$ e il rapporto r tra le probabilità condizionate $P(H \,|\, A \vee B)$ e $P(H^c \,|\, A \vee B)$.

   $p =$ $\qquad$ $r =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-2x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = Y - X$.

   $k =$ $\qquad$ $h(z) =$

6. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti, sono rispettivamente $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ e $\varphi_Y(t) = e^{-4t^2}$. Calcolare la previsione m_Z del numero aleatorio $Z = X + Y$ e la probabilità p dell'evento $(-3 \leq Z \leq 6)$.

   $m_Z =$ $\qquad$ $p =$

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è di tipo esponenziale, con parametro $\lambda_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_5)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = \theta$. Calcolare la previsione di Θ condizionata ad un campione osservato $x = (x_1, \ldots, x_5)$, con $x_1 + \cdots + x_5 = t$.

   $\mathbb{P}(\Theta \,|\, x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 28/1/2011.

1. Si ha: $C_Z = \{-3, 0, 3\}$, con $P(Z = 0) = \frac{1}{5}$, $P(Z = -3) = P(Z = 3) = \frac{2}{5}$, da cui segue $\mathbb{P}(Z) = 0$. Inoltre $XZ \in \{0, 3, 6\}$, con $P(XZ = 0) = \frac{1}{5}$, $P(XZ = 3) = P(XZ = 6) = \frac{2}{5}$, da cui segue: $\mathbb{P}(XZ) = \frac{18}{5}$; $Cov(X, Z) = \mathbb{P}(XZ) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Z) = \frac{18}{5}$.
   Infine, posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si ha
$$p = P(Z \le 0 \,|\, Y \ge 0) = \frac{p(0,0) + p(-1,2)}{p(0,0) + p(-1,2) + p(2,1)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}\,.$$

2. L'area del rettangolo R è pari a 2, pertanto $k = \frac{1}{2}$. Inoltre si verifica facilmente che le distribuzioni marginali sono uniformi, con $f_1(x) = 1$, per $x \in [1, 2]$, $f_1(x) = 0$ altrove; $f_2(y) = \frac{1}{2}$, per $y \in [3, 5]$, $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto
$$\mathbb{P}(X) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}\,,\;\; \mathbb{P}(Y) = \frac{3+5}{2} = 4\,,\;\; \mu = \mathbb{P}(X+Y) = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}\,;$$
   inoltre, essendo $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x, y)$, X ed Y sono stocasticamente indipendenti; quindi
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{(2-1)^2}{12} + \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{5}{12}\,,$$
   da cui segue: $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3. Essendo $Cov(X, Y) = Cov(Y, X) = 0$, si ha
$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) =$$
$$= Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{12} - \frac{4}{12} = -\frac{1}{4}\,.$$
   Inoltre, indicando con T il triangolo di vertici $(2, 3), (2, 5), (1, 4)$ e con D il trapezio di vertici $(2, 3), (2, 5), (1, 5), (1, 4)$, si ha
$$(Y \le X+3,\; X+Y > 5) = [(X,Y) \in T]\,,\;\; (X+Y > 5) = [(X,Y) \in D]\,;$$
   da cui segue
$$P(Y \le X+3,\; X+Y > 5) = \int\!\!\int_T f(x,y)dxdy = \frac{area(T)}{area(R)} = \frac{1}{2}\,,$$
$$P(X+Y > 5) = \int\!\!\int_D f(x,y)dxdy = \frac{area(D)}{area(R)} = \frac{3}{4}\,,\;\; p = \frac{P(Y \le X+3,\; X+Y>5)}{P(X+Y>5)} = \frac{2}{3}\,.$$

4. Si ha $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$, $P(A^cB^cH) = P(H)P(A^c|H)P(B^c|A^cH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; inoltre $P(A \vee B \,|\, H) = 1 - P(A^cB^c \,|\, H) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, $P(A \vee B \,|\, H^c) = 1$; pertanto
$$P(H \,|\, A \vee B) = \frac{P(A \vee B \,|\, H)P(H)}{P(A \vee B \,|\, H)P(H) + P(A \vee B \,|\, H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\,,$$
   da cui segue: $P(H^c \,|\, A \vee B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, $r = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$.

5. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_0^{+\infty}(e^{-2x}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy)dx = \cdots = \frac{k}{3}\int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = \frac{k}{3} = 1\,;$$

pertanto $k=3$. Inoltre, si ha $Z \in [0,+\infty)$ e, per ogni fissato $z>0$, risulta

$$S(z) = P(Z>z) = P(Y>X+z) = \int_0^{+\infty} dx\int_{x+z}^{+\infty} 3e^{-2x-y}dy = \int_0^{+\infty}(3e^{-2x}\int_{x+z}^{+\infty} e^{-y}dy)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} 3e^{-2x}e^{-(x+z)}dx = e^{-z}\int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = e^{-z}\,.$$

Pertanto, per ogni $z>0$, si ha: $h(z) = \frac{-S'(z)}{S(z)} = \frac{e^{-z}}{e^{-z}} = 1$ (*ovvero, Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$*).

6. Si ha

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-4t^2} = e^{-\frac{9t^2}{2}}\,;\ \ \varphi'_Z(t) = -9te^{-\frac{9t^2}{2}}\,,\ \ \varphi'_Z(0) = 0 = i\,m_Z\,,$$

da cui segue: $m_Z = 0$. Inoltre, osservando che $Z \sim N_{0,3}$, si ottiene

$$p = P(-3 \le Z \le 6) = \Phi_{0,3(6)} - \Phi_{0,3(-3)} = \Phi\left(\frac{6-0}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{3}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185\,.$$

7. Ricordando che $G_{c,\lambda}(x) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)}x^{c-1}e^{-\lambda x}$ per $x \ge 0$, con $G_{c,\lambda}(x) = 0$ altrove, si ha

$$X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = G_{2,\theta}(x_i) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)}x_i^{2-1}e^{-\theta x_i} = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i},\ i = 1,\ldots,5\,,$$

da cui segue

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta)\cdots f(x_5|\theta) = \theta^{10}x_1\cdots x_5 e^{-\theta\sum_i x_i} = k\theta^{10}e^{-t\theta}\,,\ \ k = x_1\cdots x_5\,;$$

inoltre $\beta(\theta) = G_{c_0,\lambda_0}(\theta) = G_{1,3}(\theta) = 3e^{-3\theta}$ per $\theta \ge 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Allora, la distribuzione finale è ancora di tipo Gamma e risulta

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k_1(x)e^{-3\theta}\theta^{10}e^{-t\theta} = k_1(x)\theta^{10}e^{-(t+3)\theta} = G_{c_5,\lambda_5}(\theta) = G_{11,t+3}(\theta)\,,$$

con $k_1(x) = \frac{\lambda_5^{c_5}}{\Gamma(c_5)} = \frac{(t+3)^{11}}{10!}$; pertanto: $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) = \frac{c_5}{\lambda_5} = \frac{11}{t+3}$.