Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 17/7/2012)

(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Una macchina M produce palline, dello stesso peso e della stessa forma, ognuna bianca o nera con uguale probabilità $\frac{1}{2}$. Definiti gli eventi, giudicati stocasticamente indipendenti, E_i = *"l'i-ma pallina prodotta da M è bianca"*, consideriamo un lotto L formato da n palline, delle quali un numero aleatorio X sono bianche. Calcolare: (i) i valori di n tali che è maggiore di $\frac{1023}{1024}$ la probabilità p che nel lotto L ci sia almeno una pallina bianca; (ii) la probabilità condizionata α che in L ci siano al massimo 2 palline bianche, supposto che in L ci sia almeno 1 pallina bianca, verificando che $\alpha = \frac{6}{7}$ per $n = 3$ e che $\alpha = \frac{2}{3}$ per $n = 4$.

   $n \in$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [-2, 2]$ è $f(x) = \frac{1}{5}$, per $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$, $f(x) = a$, per $x \in (-1, 1)$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione m di X e i valori x tali che $F(x) > \frac{4}{5}$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $x \in$

3. Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y) \in \{(-2, -1), (-2, 1), (-1, 0), (1, 0), (2, -1), (2, 1)\}$, con $P(X = -1, Y = 0) = P(X = 1, Y = 0) = a$ e con gli altri punti ugualmente probabili fra di loro, calcolare i valori che si possono assegnare ad a. Inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $a \in$ $\qquad\qquad$ $\rho =$ $\qquad\qquad$ *Indipendenza* ?

4. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = \frac{1}{4}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z^2 =$

5. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con densità $f(x, y) = e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, e con $f(x, y) = 0$ altrove, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, posto $Z = Y - X$, calcolare σ_Z^2 e $p = P(Z > z)$, con $z > 0$.

   Indipendenza ? $\qquad\qquad$ $\sigma_Z^2 =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Con riferimento all'esercizio 5, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio $T = 2X$.

   $S_T(t) =$ $\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 4$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, calcolare (utilizzando la distribuzione finale di Θ) la probabilità p dell'evento condizionato $(\Theta > \frac{20}{49} \,|\, \Theta > -\frac{8}{49}; \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 17/7/2012.

1. Si ha $X \sim B(n, \frac{1}{2})$, con $p = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{1023}{1024} \iff n > 10$. Inoltre: $\alpha = P(X \leq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \leq 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{1-P(X=0)} =$ $= \frac{\frac{n}{2^n} + \frac{\binom{n}{2}}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{n+\binom{n}{2}}{2^n - 1} = \frac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$, con $\alpha = \frac{6}{7}$ per $n = 3$, $\alpha = \frac{2}{3}$ per $n = 4$.

2. Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{5}dx + \int_{-1}^{1} a dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{5}dx = 2a + \frac{2}{5} = 1$; pertanto: $a = \frac{3}{10}$. Inoltre
$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{5}x dx + \int_{-1}^{1} \frac{3}{10}x dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{5}x dx = 0\,,$$
come seguirebbe immediatamente osservando che $f(x)$ ha un diagramma simmetrico rispetto all'asse y. Infine, per $x \in (1, 2)$, si ha
$$F(x) = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{5}dx + \int_{-1}^{1} \frac{3}{10}dx + \int_{1}^{x} \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(x-1) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}(x-1) > \frac{4}{5}\,,$$
con $F(1) = \frac{4}{5}$ e con $F(x) = 1$ per $x \geq 2$; pertanto: $F(x) > \frac{4}{5}$ per $x > 1$.

3. Si ha $0 \leq P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 2a \leq 1$; pertanto $a \in [0, \frac{1}{2}]$, con $P(X = x, Y = y) = \frac{1-2a}{4}$ per ogni $(x, y) \in \{(-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)\}$. Inoltre $X \in \{-2, -1, 1, 2\}$, $Y \in \{-1, 0, 1\}$, $XY \in \{-2, 0, 2\}$, con
$$P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1-2a}{2}\,,\ P(X = -1) = P(X = 1) = a\,,$$
$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1-2a}{2}\,,\ P(Y = 0) = 2a\,,$$
$$P(XY = -2) = P(XY = 2) = \frac{1-2a}{2}\,,\ P(XY = 0) = 2a\,,$$
Allora: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(XY) = 0$; pertanto: $Cov(X, Y) = \rho = 0$. Infine, osservando ad esempio che $a = P(X = -1, Y = 0) \neq P(X = -1)P(Y = 0) = a \cdot 2a = 2a^2$, segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha $Z \in \{-3, -1, 1, 3\}$, con $P(Z = -3) = P(Z = 3) = \frac{1}{8}$, $P(Z = -1) = P(Z = 1) = \frac{3}{8}$; pertanto
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \frac{1}{8}(e^{-3it} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{3it}) = \frac{3cos(t) + cos(3t)}{4}\,,$$

con $\varphi'_Z(t) = -\frac{3}{4}[sen(t) + sen(3t)]$, $\varphi''_Z(t) = -\frac{3}{4}[cos(t) + 3cos(3t)]$. Allora

$$\mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi'_Z(0)}{i} = \frac{0}{i} = 0\,, \quad \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi''_Z(0)}{i^2} = \frac{-3}{-1} = 3\,, \quad \sigma_Z^2 = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = 3\,.$$

In alternativa:

$$\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{8}\cdot(-3) + \frac{3}{8}\cdot(-1) + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 3 = 0\,;\ \sigma_Z^2 = \mathbb{P}(Z^2) = \frac{1}{8}\cdot 9 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 9 = 3\,.p$$

5. Si ha $f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}dy = \cdots = e^{-x}\,,\ x \geq 0$; $f_2(y) = \cdots = e^{-y}\,,\ y \geq 0$. Pertanto X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y); quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora $Cov(X,Y) = 0$ e si ha: $\sigma_Z^2 = Var(Y - X) = Var(Y) + Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 2$. Fissato $z > 0$, si ha $p = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - P(Y - X \leq z)$, con

$$P(Y - X \leq z) = P(Y \leq X + z) = \int_0^{+\infty}\big(\int_0^{x+z} e^{-x}e^{-y}dy\big)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\int_0^{x+z} e^{-y}dy\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-(x+z)})dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx - e^{-z}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = 1 - e^{-z}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = 1 - \tfrac{1}{2}\,e^{-z}.$$

Pertanto: $p = \frac{1}{2}\,e^{-z}$.

6. Si ha $T = 2X \geq 0$, con $f_1(x) = e^{-x}\,,\ x \geq 0$, con $f_1(x) = 0$ altrove; allora, fissato $t \geq 0$, segue

$$S_T(t) = P(T > t) = P(2X > t) = P(X > \frac{t}{2}) = \int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-\frac{t}{2}}\,,$$

con $S_T(t) = 1$ per $t < 0$. Allora $f_T(t) = -S'_T(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ per $t \geq 0$, con $f_T(t) = 0$ per $t < 0$ (T ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$); pertanto: $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}}{e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1}{2}\,,\ t \geq 0$, con $h_T(t) = 0$ per $t < 0$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3,\sigma_3}$, con $\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16}$, e quindi $\sigma_3 = \frac{4}{7}$, e con $m_3 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{3}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2}} = \frac{3}{\frac{49}{16}} = \frac{48}{49}$. Pertanto, per la distribuzione finale risulta $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{\frac{48}{49},\frac{4}{7}}$. Allora, osservando che $m_3 - \sigma_3 = \frac{20}{49}$, $m_3 - 2\sigma_3 = -\frac{8}{49}$, segue

$$p = P(\Theta > \frac{20}{49} \,|\, \Theta > -\frac{8}{49}; \mathbf{x}) = \frac{P(\Theta > \frac{20}{49} \,|\, \mathbf{x})}{P(\Theta > -\frac{8}{49} \,|\, \mathbf{x})} = \frac{1 - \Phi_{m_3,\sigma_3}(\frac{20}{49})}{1 - \Phi_{m_3,\sigma_3}(-\frac{8}{49})} =$$

$$= \frac{1 - \Phi_{m_3,\sigma_3}(m_3 - \sigma_3)}{1 - \Phi_{m_3,\sigma_3}(m_3 - 2\sigma_3)} = \frac{1 - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-2)} = \frac{\Phi(1)}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413}{0.9772} \simeq 0.8609\,.$$