Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr. - Latina* - 10/9/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Si considerino due urne U e V, con U contenente 2 palline bianche e 1 nera e V contenente 1 pallina bianca e 2 nere. Tizio e Caio effettuano, rispettivamente da U e V, 2 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A_i =$ *"l'i-ma pallina estratta da Tizio è bianca"*, $i = 1, 2$, $B_j =$ *"la j-ma pallina estratta da Caio è bianca"*, $j = 1, 2$, sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da Caio. Calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 2|X + Y = 3)$ e la covarianza della coppia $(X - Y, X + Y)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $Cov(X - Y, X + Y) =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = X + Y$, calcolare la probabilità $c_n = P(Z = n)$, per ogni valore possibile n di Z, e la funzione caratteristica di Z.

   $n :$
   $c_n :$ $\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (3, 0), (0, 3)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$ ed $f_2(y)$; inoltre, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(X + Y > 1 \,|\, X + Y \leq 2)$.

   $f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(y) =$ $\qquad$ $p =$

4. Su un lotto di 3 pezzi apparentemente identici sono possibili solo due ipotesi H_0, H_1, con $H_0 =$ *"nessuno dei 3 pezzi è difettoso"*, $H_1 =$ *"uno solo dei 3 pezzi è difettoso"*, con $P(H_1) = 3P(H_0)$. Un operatore controlla uno dopo l'altro tutti i pezzi. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo controllato è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare $P(E_3)$ e $P(E_3|E_1E_2)$.

   $P(E_3) =$ $\qquad$ $P(E_3|E_1E_2) =$

5. Un sistema S è costituito da due dispositivi a e b in parallelo funzionanti simultaneamente, con tempi aleatori di durata fino al guasto, per a, b ed S, rispettivamente: X, Y e Z. Fissato un valore $t > 0$ e definiti gli eventi $E_1 = (X \leq t)$, $E_2 = (Y \leq t)$, $E_3 = (Z \leq t)$, esprimere $|E_3^c|$ in funzione di $|E_1^c|, |E_2^c|$. Inoltre, assumendo che la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) sia $f(x, y) = e^{-\frac{x}{2}-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare il prodotto $\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)$ e il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   $|E_3^c| =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) =$ $\qquad$ $\rho_{XY} =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di Z.

   $S_Z(z) =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Da un gruppo di 8 studenti, dei quali 3 non sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 2. Successivamente, il quesito viene sottoposto a uno dei 2 studenti (scelto a caso). Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra i 2 studenti estratti a caso ve ne sono r che non sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; $A =$ *"lo studente scelto a caso sa risolvere il quesito"*, calcolare $\alpha = P(A)$ e la probabilità condizionata β che tutti e due gli studenti (estratti dal gruppo di 8 studenti) sappiano risolvere il quesito, supposto vero A.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 10/9/2013.

1. Si ha: $X \sim B(2, \frac{2}{3}), Y \sim B(2, \frac{1}{3})$; inoltre, posto $P(X = h) = a_h, P(Y = k) = b_k$, si ha
$$a_h = \binom{2}{h}\left(\frac{2}{3}\right)^h\left(\frac{1}{3}\right)^{2-h}, \; h = 0,1,2, \quad b_k = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{2-k}, \; k = 0,1,2,$$
con $a_0 = b_2 = \frac{1}{9}$, $a_1 = b_1 = \frac{4}{9}$, $a_2 = b_0 = \frac{4}{9}$. X e Y sono stocasticamente indipendenti; quindi $P(X = h, Y = k) = a_h b_k$, per ogni h, k. Allora, osservando che
$$(X = 2, X+Y = 3) = (X = 2, Y = 1)\,, \quad (X+Y = 3) = (X = 1, Y = 2) \vee (X = 2, Y = 1)\,,$$
segue: $\alpha = P(X = 2|X + Y = 3) = \frac{P(X=2,X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1} =$
$= \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$. Inoltre, osservando che per una distribuzione $B(n, p)$ la varianza è npq, si ha $Var(X) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = Var(Y)$. Allora, essendo $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$, segue
$$Cov(X-Y, X+Y) = Cov(X, X)+Cov(X, Y)-Cov(Y, X)-Cov(Y, Y) = Var(X)-Var(Y) = 0\,.$$

2. Si ha $Z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e, poichè X e Y sono stocasticamente indipendenti, si ottiene
$$c_0 = a_0 b_0 = \frac{4}{81}\,, \; c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = \frac{20}{81}\,, \; c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \frac{33}{81}\,,$$
$$c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 = \frac{20}{81}\,, \; c_4 = a_2 b_2 = \frac{4}{81}\,.$$
Inoltre: $\varphi_Z(t) = \sum_{n=0}^{4} c_n e^{itn} = \frac{4+20e^{it}+33e^{2it}+20e^{3it}+4e^{4it}}{81}$.
In alternativa: osservando che $\varphi_X(t) = \left(\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}\right)^2, \varphi_Y(t) = \left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^2$, segue
$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{(2e^{it} + 1)^2}{9} \cdot \frac{(e^{it} + 2)^2}{9} = \cdots\,.$$

3. L'area del triangolo T è $\frac{9}{2}$; pertanto la densità congiunta è $f(x, y) = \frac{2}{9}$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, l'equazione della retta passante per i punti $(3, 0), (0, 3)$ è: $x + y = 3$. Allora: $f_1(x) = \int_0^{3-x} \frac{2}{9}dy = \frac{2}{9}(3 - x)\,, \; 0 \le x \le 3$, con $f_1(x) = 0$ altrove; $f_2(y) = \int_0^{3-y} \frac{2}{9}dx = \frac{2}{9}(3 - y)\,, \; 0 \le y \le 3$, con $f_2(y) = 0$, altrove. Infine, siano T_1 il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, T_2 il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Tenendo conto che la distribuzione è uniforme, per ogni sottinsieme misurabile A di T, indicando con $\mu(A)$ l'area di A, si ha $\int\int_A f(x, y)dxdy = \frac{\mu(A)}{\mu(T)} = \frac{2}{9}\mu(A)$. Allora, indicando con $T_2 \setminus T_1$ l'insieme differenza tra T_2 e T_1, si ha
$$p = P(X + Y > 1\,|\,X + Y \le 2) = \frac{P(X + Y > 1, X + Y \le 2)}{P(X + Y \le 2)} = \frac{\int\int_{T_2\setminus T_1} f(x, y)dxdy}{\int\int_{T_2} f(x, y)dxdy} =$$
$$= \frac{\frac{2}{9}\mu(T_2 \setminus T_1)}{\frac{2}{9}\mu(T_2)} = \frac{\mu(T_2) - \mu(T_1)}{\mu(T_2)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}\,.$$

4. Si tratta di estrazioni senza restituzione da un lotto di composizione incognita, con E_1, E_2, E_3 scambiabili. Osservando che $P(H_0) = \frac{1}{4}$, $P(H_1) = \frac{3}{4}$, $P(E_1|H_0) = 1$, $P(E_1|H_1) = \frac{2}{3}$, segue

$$P(E_3) = P(E_1) = P(E_1|H_0)P(H_0) + P(E_1|H_1)P(H_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Inoltre, osservando che $P(E_1E_2|H_0) = P(E_1E_2E_3|H_0) = 1$, $P(E_1E_2|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(E_1E_2E_3|H_1) = 0$, segue

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H_0)P(H_0) + P(E_1E_2|H_1)P(H_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H_0)P(H_0) + P(E_1E_2E_3|H_1)P(H_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Pertanto: $P(E_3|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{1}{2}$.

5. Si ha $Z = max\{X, Y\}$; pertanto $E_3 = (Z \leq t) = (X \leq t, Y \leq t) = E_1E_2$. Allora

$$|E_3^c| = 1 - |E_3| = 1 - |E_1||E_2| = 1 - (1 - |E_1^c|)(1 - |E_2^c|) = |E_1^c| + |E_2^c| - |E_1^c||E_2^c|.$$

In alternativa: $E_3^c = (Z > t) = (X > t) \vee (Y > t) = E_1^c \vee E_2^c$; quindi

$$|E_3^c| = |E_1^c \vee E_2^c| = |E_1^c| + |E_2^c| - |E_1^cE_2^c| = |E_1^c| + |E_2^c| - |E_1^c||E_2^c|.$$

Inoltre: $f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}-2y}dy = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $x \geq 0$; $f_2(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}-2y}dx = 2e^{-2y}$, $y \geq 0$. Pertanto X e Y hanno una distribuzione di tipo esponenziale con parametri rispettivamente $\frac{1}{2}$ e 2. Allora $\mathbb{P}(X) = 2, \mathbb{P}(Y) = \frac{1}{2}$, da cui segue $\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 1$. Infine, essendo $f(x, y) = f_1(x)f_2(y), \forall(x, y)$, i numeri aleatori X, Y sono stocasticamente indipendenti e quindi incorrelati; pertanto: $\rho_{XY} = 0$.

6. Fissato $z > 0$, si ha: $S_Z(z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - P(X \leq z, Y \leq z) =$

$$= 1 - P(X \leq z)P(Y \leq z) = 1 - (1 - e^{-\frac{z}{2}})(1 - e^{-2z}) = e^{-\frac{z}{2}} + e^{-2z} - e^{-\frac{5}{2}z}.$$

Inoltre $f_Z(z) = -S'_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} + 2e^{-2z} - \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}z}$; allora

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} + 2e^{-2z} - \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}z}}{e^{-\frac{z}{2}} + e^{-2z} - e^{-\frac{5}{2}z}} = \frac{e^{2z} + 4e^{\frac{z}{2}} - 5}{2(e^{2z} + e^{\frac{z}{2}} - 1)}.$$

7. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{3}{r}\binom{5}{2-r}}{\binom{8}{2}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28},$$

con $P(A|H_0) = 1$, $P(A|H_1) = \frac{1}{2}$, $P(A|H_2) = 0$. Allora

$$\alpha = P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{28} = \frac{5}{8};$$

inoltre: $\beta = P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{5}{14}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$.