Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 25/1/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un lotto L, contenente 6 pezzi buoni e 2 difettosi, si prendono a caso 3 pezzi da utilizzare in un sistema S nel quale uno dei pezzi è messo in serie con un modulo nel quale sono disposti in parallelo gli altri due pezzi. Sia X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i 3 pezzi estratti da L. Calcolare: (i) la probabilità p che sia possibile far funzionare S; (ii) la probabilità α che sia possibile far funzionare S, supposto che almeno uno dei 3 pezzi sia difettoso.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. Siano Y e Z due numeri aleatori stocasticamente indipendenti e con distribuzione di probabilità uguale a quella del numero aleatorio X dell'esercizio 1. Posto $U = Y + Z$, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_U(t)$; inoltre, utilizzando $\varphi_U(t)$, calcolare la previsione μ di U.

   $\varphi_U(t) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mu =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{x+y}{3}$ per $(x, y) \in [0, 2]\times[0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(Y > X \,|\, X \leq 1)$; (ii) la funzione di ripartizione F_Y di Y.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $F_Y(y) =$

4. Dato un numero aleatorio continuo X, con $X \sim N_{m,\sigma}$, stabilire se, fissato $k > 0$ e posto $\alpha = P(X \geq m + 2k\sigma \,|\, X \geq m + k\sigma)$, $\beta = P(\frac{X-m}{\sigma} \geq 2k \,|\, \frac{X-m}{\sigma} \geq k)$, vale l'uguaglianza $\alpha = \beta$. Inoltre, posto $m = 2, \sigma = 1, Y = 3X - 2$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(1 \leq Y \leq 7 \,|\, -2 \leq Y \leq 10)$.

   $\alpha = \beta$? $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $p =$

5. Si assuma che la probabilità di ottenere Testa lanciando una moneta difettosa sia p, con $0 < p < 1$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-mo lancio esce Testa"*, $i = 1, 2, \ldots$, calcolare: (i) la probabilità $\alpha = P[E_1E_2 \wedge (E_3 \vee E_4)]$ in funzione di p; (ii) il valore di p tale che $P(E_1E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{1}{3}$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $p =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, $x \geq 0$, $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la funzione di rischio $h_2(y)$ di Y.

   $k =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

7. Le ipotesi per un'urna di composizione incognita sono due: (i) l'urna contiene 2 palline bianche e 1 nera (ipotesi H); (ii) l'urna contiene 1 pallina bianca e 2 nere (ipotesi H^c). Dall'urna si effettuano estrazioni con restituzione; definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \ldots$, e supposto $P(H) = p$, stabilire per quali valori di p gli eventi E_1, E_2 sono correlati. Inoltre, calcolare $P(E_1|E_4)$ e verificare se $P(H|E_1E_2^c) = P(H)$.

   $p \in$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P(E_1|E_4) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P(H|E_1E_2^c) = P(H)$?

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 25/1/2013.

1. Si ha $X \sim H(8, 3, \frac{1}{4})$, con $P(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{8}{3}}$, $k = 0, 1, 2$; quindi

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{28}, \quad P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28}, \quad P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{28}.$$

Il sistema S può funzionare se e solo se $X \leq 1$; pertanto: $p = 1 - P(X = 2) = \frac{25}{28}$. Inoltre

$$\alpha = P(X \leq 1 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(X \leq 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{5}{6}.$$

2. Posto $P(X = k) = p_k$, si ha $\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itk} = \frac{10+15e^{it}+3e^{2it}}{28}$, con $\varphi_Y(t) = \varphi_Z(t) = \varphi_X(t)$; allora

$$\varphi_U(t) = \mathbb{P}(e^{itU}) = \mathbb{P}(e^{itY+itZ}) = \mathbb{P}(e^{itY})\mathbb{P}(e^{itZ}) = \varphi_Y(t)\varphi_Z(t) = [\varphi_X(t)]^2 = \left(\frac{10 + 15e^{it} + 3e^{2it}}{28}\right)^2.$$

Inoltre, osservando che $\varphi_X(0) = 1$ e che $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{P}(X^k)$, si ha

$$\varphi_U'(t) = 2\varphi_X(t)\varphi_X'(t) = 2\varphi_X(t)\cdot\frac{15ie^{it} + 6ie^{2it}}{28}, \quad \varphi_U'(0) = 2\varphi_X(0)\frac{15i + 6i}{28} = \frac{3}{2}\,i = i\mathbb{P}(U);$$

pertanto: $\mu = \mathbb{P}(U) = \frac{3}{2}$.

3. Si ha $P(X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x+y}{3} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}$; inoltre $P(Y > X, X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{x+y}{3} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6}$. Pertanto: $p = \frac{P(Y>X, X\leq 1)}{P(X\leq 1)} = \frac{1}{2}$. Osservando poi che $Y \in [0, 1]$, segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$; $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$; per $y \in (0, 1)$ si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f_2(t)dt = \int_0^y dt \int_0^2 f(x,t)dx = \int_0^y dt \int_0^2 \frac{x+t}{3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^y \left[\frac{x^2}{2} + xt\right]_0^2 dt = \frac{1}{3}\int_0^y (2 + 2t)dt = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\,y + x\,\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{y^2 + 2y}{3}.$$

4. Osservando che $(X \geq m + 2k\sigma) = (\frac{X-m}{\sigma} \geq 2k)$ e $(X \geq m + k\sigma) = (\frac{X-m}{\sigma} \geq k)$, segue

$$\alpha = P(X \geq m + 2k\sigma \,|\, X \geq m + k\sigma) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq 2k \mid \frac{X-m}{\sigma} \geq k\right) = \beta\,.$$

Inoltre, ricordando che da $X \sim N_{m,\sigma}$ segue $\frac{X-m}{\sigma} \sim N$, si ha

$$\alpha = \beta = \frac{P(\frac{X-m}{\sigma} \geq 2k, \frac{X-m}{\sigma} \geq k)}{P(\frac{X-m}{\sigma} \geq k)} = \frac{P(\frac{X-m}{\sigma} \geq 2k)}{P(\frac{X-m}{\sigma} \geq k)} = \frac{1-\Phi(2k)}{1-\Phi(k)}\,.$$

Infine, $Y \sim N_{m_Y,\sigma_Y}$, con $m_Y = 3m - 2 = 4, \sigma_Y = 3\sigma = 3$; ovvero $Y \sim N_{4,3}$. Allora

$$p = P(1 \leq Y \leq 7 \,|\, -2 \leq Y \leq 10) = \frac{P(1 \leq Y \leq 7, -2 \leq Y \leq 10)}{P(-2 \leq Y \leq 10)} = \frac{P(1 \leq Y \leq 7)}{P(-2 \leq Y \leq 10)} =$$

$$= \frac{\Phi_{4,3}(7) - \Phi_{4,3}(1)}{\Phi_{4,3}(10) - \Phi_{4,3}(-2)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{2\Phi(2) - 1} \simeq \frac{2 \times 0.8413 - 1}{2 \times 0.9772 - 1} \simeq 0.7152\,.$$

5. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = p$; allora:
$\alpha = P[E_1E_2 \wedge (E_3 \vee E_4)] = P(E_1E_2E_3 \vee E_1E_2E_4) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2E_4) - P(E_1E_2E_3E_4) =$
$= p^3 + p^3 - p^4 = p^3(2-p)$. Inoltre

$$P(E_1E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P[E_1E_2 \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1E_2)}{1 - P(E_1^cE_2^cE_3^c)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^3} =$$

$$= \frac{p}{3 - 3p + p^2} = \frac{1}{3} \iff p^2 - 6p + 3 = 0\,, \quad (0 < p < 1) \iff p = 3 - \sqrt{6} \simeq 0.55\,.$$

6. Si ha: $\int_0^{+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dxdy = k \int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-y}]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx = k \int_0^{+\infty} e^{-x}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-2x})dx =$
$= \frac{2}{3}\,k \int_0^{+\infty} \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}\,x} dx - \frac{1}{3}\,k \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = \frac{2}{3}\,k - \frac{1}{3}\,k = \frac{1}{3}\,k = 1$; pertanto $k = 3$. Inoltre

$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{2}}^{2y} 3e^{-x-y}dx = 3e^{-y} \int_{\frac{y}{2}}^{2y} e^{-x}dx = 3e^{-y}(e^{-\frac{y}{2}} - e^{-2y}) = 3e^{-\frac{3}{2}\,y} - 3e^{-3y}\,,$$

$$S_2(y) = \int_y^{+\infty} f_2(t)dt = 2 \int_y^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\,t} dt - \int_y^{+\infty} 3e^{-3t}dt = 2e^{-\frac{3}{2}\,y} - e^{-3y}\,,$$

da cui segue: $h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{3e^{-\frac{3}{2}\,y} - 3e^{-3y}}{2e^{-\frac{3}{2}\,y} - e^{-3y}} = \frac{3e^{\frac{3}{2}\,y} - 3}{2e^{\frac{3}{2}\,y} - 1}$.

7. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots,$ sono scambiabili, con

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_1|H)P(H) + P(E_1|H^c)P(H^c) = \frac{2}{3}\,p + \frac{1}{3}\,(1-p) = \frac{1}{3}\,p + \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\,;$$

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \frac{4}{9}\,p + \frac{1}{9}\,(1-p) = \frac{1}{3}\,p + \frac{1}{9} \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]\,;$$

allora $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{3}\,p + \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}\,p + \frac{1}{3}} = \frac{3p+1}{3p+3} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e si ha:
$P(E_2|E_1) - P(E_2) = \frac{3p+1}{3p+3} - \frac{1}{3}\,p - \frac{1}{3} = \cdots = \frac{p(1-p)}{3(p+1)} > 0\,, \ \forall\, p \in (0,1)$; ovvero E_1 ed E_2 sono correlati positivamente per ogni $p \in (0,1)$. Inoltre, dalla scambiabilità segue $P(E_1|E_4) = \frac{P(E_1E_4)}{P(E_4)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = P(E_2|E_1) = \frac{3p+1}{3p+3}$. Infine

$$P(H|E_1E_2^c) = \frac{P(H)P(E_1E_2^c|H)}{P(H)P(E_1E_2^c|H) + P(H^c)P(E_1E_2^c|H^c)} = \frac{\frac{2}{9}\,p}{\frac{2}{9}\,p + \frac{2}{9}\,(1-p)} = p = P(H)\,.$$