**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 3/11/2014)
*(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. Un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme sul triangolo $T$ di vertici i punti $(1, 2), (2, 2), (1, 3)$. Stabilire se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti e calcolare la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(Y \geq \frac{5}{2} \,|\, X \leq \frac{3}{2})$.

   $X, Y$ *indipendenti* ? $\qquad\qquad$ $p =$

2. Date due urne $U$, contenente 3 palline bianche e 1 nera, e $V$, inizialmente vuota, da $U$ si prendono a caso 3 palline che vengono inserite in $V$. Successivamente, da $V$ si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Siano $X$ ed $Y$, rispettivamente, il numero aleatorio di palline bianche inserite in $V$ ed il numero aleatorio di palline bianche estratte da $V$. Calcolare la previsione di $X$, il codominio $\mathcal{C}$ del vettore aleatorio $(X, Y)$ e lo scarto standard di $Y$.

   $m_X =$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{C} =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Y =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare il coefficiente di correlazione di $X, Y$ e la probabilità $\alpha$ dell'evento condizionato $(X = 2)|(X + Y > 3)$.

   $\rho_{XY} =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Dato un numero aleatorio $X$, con distribuzione normale di parametri $m = 0, \sigma = 3$, e posto $Y = -X + 2, Z = 2Y - 1$, calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione di $X, Z$. Inoltre, calcolare la probabilità $\gamma$ dell'evento condizionato $(X + Z \geq 0 \,|\, X + Z \geq -3)$.

   $Cov(X, Z) =$ $\qquad\qquad$ $\rho_{XZ} =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

5. Con riferimento all'esercizio 4, posto $U = Y + Z$, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_U(t)$; inoltre, posto $V = -\frac{U-5}{9}$, calcolare la previsione $m_V$ e lo scarto quadratico medio $\sigma_V$.

   $\varphi_U(t) =$ $\qquad\qquad$ $m_V =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_V =$

6. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = ae^{-2x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $a$ e la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per $z > 0$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Con riferimento all'esercizio 2, si supponga che le estrazioni senza restituzione effettuate dall'urna $V$ siano 3. Definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-ma estrazione si ottiene pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se $E_1, E_2, E_3$ sono equiprobabili e se sono scambiabili.

   $E_1, E_2, E_3$ *equiprobabili* ? $\qquad\qquad$ $E_1, E_2, E_3$ *scambiabili* ?

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 3/11/2014.*

1. L'area di $T$ è $\frac{1}{2}$; pertanto $f(x,y) = 2$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, osservando che la retta passante per i punti $(1,3),(2,2)$ ha equazione $x+y=4$, segue

$$f_1(x) = \int_2^{4-x} 2dy = -2x+4\,,\ x \in [1,2]\,;\ \ f_2(y) = \int_1^{4-y} 2dx = -2y+6\,,\ y \in [2,3]\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto: $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; ovvero $X$ e $Y$ non sono stocasticamente indipendenti. Inoltre

$$p = P(Y \geq \frac{5}{2}\,|\,X \leq \frac{3}{2}) = \frac{P(X \leq \frac{3}{2},\, Y \geq \frac{5}{2})}{P(X \leq \frac{3}{2})} = \frac{\int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{5}{2}}^{4-x} 2dy}{\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+4)dx} = \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\,.$$

*In termini geometrici:* considerando il triangolo $A$ di vertici i punti $(1,3),(1,\frac{5}{2}),(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$, che rappresenta l'evento $(X \leq \frac{3}{2},\, Y \geq \frac{5}{2})$, e il trapezio $B$ di vertici i punti $(1,3),(1,2),(\frac{3}{2},2),(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$, che rappresenta l'evento $(X \leq \frac{3}{2})$, essendo la distribuzione uniforme basta osservare che l'area di $A$ è $\frac{1}{3}$ dell'area di $B$.

2. Si ha $X \sim H(4,3,\frac{3}{4})$, con $X \in \{2,3\}$ e con $P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$, $P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{1}{0}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4}$; pertanto $m_X = np = \frac{9}{4}$ $(= \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3)$. Inoltre, se $X=2$, si ha $Y \in \{1,2\}$; se $X=3$, si ha $Y=2$; pertanto: $\mathcal{C} = \{(2,1),(2,2),(3,2)\}$. Infine, $Y \in \{1,2\}$, con

$$P(Y=1) = P(X=2,Y=1) = P(X=2)P(Y=1|X=2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{2} = P(Y=2)\,,$$

da cui segue: $\mathbb{P}(Y) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\mathbb{P}(Y^2) = 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
Pertanto: $\sigma_Y = \sqrt{\mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(Y)]^2} = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2}$.

3. Si ha $\mathbb{P}(X) = \frac{9}{4}, \sigma_X = \sqrt{npq(1 - \frac{n-1}{N-1})} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \mathbb{P}(Y) = \frac{3}{2}, \sigma_Y = \frac{1}{2}$; inoltre $XY \in \{2,4,6\}$, con

$$P(XY=2) = P(X=2,Y=1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(XY=4) = P(X=2,Y=2) = P(X=2)P(Y=2|X=2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(XY=6) = P(X=3,Y=2) = P(X=3)P(Y=2|X=3) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}\,,$$

da cui segue: $\mathbb{P}(XY) = 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{2}$.
Pertanto: $Cov(X,Y) = \frac{7}{2} - \frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{8}$, $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Infine: $\alpha = P(X=2)|(X+Y>3) = \frac{P(X=2,X+Y>3)}{P(X+Y>3)} = \frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

4. Si ha: $Cov(X,Z) = Cov(-Y+2, 2Y-1,) = -2Cov(Y,Y) = -2Var(Y) = -18$; inoltre $\sigma_X = 3$, $\sigma_Z = 2\sigma_Y = 2\sigma_X = 6$; pertanto: $\rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = \frac{-18}{18} = -1$ (tale risultato segue anche osservando che $Z = -2X+3$). Infine, essendo $X+Z = Y+1 = -X+3$, segue

$$\gamma = P(X+Z \geq 0 \,|\, X+Z \geq -3) = P(X \leq 3 \,|\, X \leq 6) = \frac{P(X \leq 3, X \leq 6)}{P(X \leq 6)} =$$

$$= \frac{P(X \leq 3)}{P(X \leq 6)} = \frac{\Phi_{0,3}(3)}{\Phi_{0,3}(6)} = \frac{\Phi(1)}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413}{0.9772} \simeq 0.8609\,.$$

5. Ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione normale, di parametri $m, \sigma$, è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, segue

$$\varphi_U(t) = \mathbb{P}(e^{itU}) = \mathbb{P}(e^{it(Y+Z)}) = \mathbb{P}(e^{it(-3X+5)}) = e^{5it}\mathbb{P}(e^{i(-3t)X}) = e^{5it}\varphi_X(-3t) = e^{5it - \frac{81}{2}t^2}\,.$$

Inoltre $V = -\frac{U-5}{9} = \frac{X}{3} = \frac{X-m_X}{\sigma_X}$ (numero aleatorio ridotto); pertanto: $m_V = 0, \sigma_V = 1$ ($V$ ha una distribuzione normale standard).

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-x-3y}dxdy = a\int_0^{+\infty}(e^{-2x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy)dx = \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = \frac{a}{2} = 1\,;$$

pertanto: $a = 2$. Inoltre, fissato $z > 0$, si ha

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 2e^{-2x-y}dy = \int_0^z 2e^{-2x}(1-e^{-(z-x)})dx =$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x}dx - 2e^{-z}\int_0^z e^{-x}dx = 1 - e^{-2z} - 2e^{-z}(1-e^{-z}) = 1 - 2e^{-z} + e^{-2z}\,;$$

allora: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = 2e^{-z} - e^{-2z}$; $f_Z(z) = 2e^{-z} - 2e^{-2z}$.
Pertanto: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{2e^{-z}-2e^{-2z}}{2e^{-z}-e^{-2z}} = \frac{2e^z-2}{2e^z-1}$.

7. Gli eventi $E_1, E_2, E_3$, sia subordinatamente all'evento $(X = 2)$ che all'evento $(X = 3)$ sono equiprobabili, con $P(E_1|X = 2) = P(E_2|X = 2) = P(E_3|X = 2) = \frac{2}{3}$, e con $P(E_1|X = 3) = P(E_2|X = 3) = P(E_3|X = 3) = 1$. Allora, $E_1, E_2, E_3$ sono equiprobabili; in particolare, ricordando che $P(X = 2) = \frac{3}{4}$, $P(X = 3) = \frac{1}{4}$, si ha

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}\,.$$

Inoltre

$$P(E_1E_2|X = 2) = P(E_1E_3|X = 2) = P(E_2E_3|X = 2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,$$

$$P(E_1E_2|X = 3) = P(E_1E_3|X = 3) = P(E_2E_3|X = 3) = 1\,,$$

da cui segue: $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{2}$; pertanto, essendo $P(E_i) = P(E_1)$, $\forall i$, $P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$, $\forall i \neq j$, gli eventi $E_1, E_2, E_3$ sono scambiabili.