Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 4/4/2014)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U e V, contenenti 3 palline bianche e 2 nere, Tizio e Caio effettuano, rispettivamente da U e V, 2 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi A_i = *"l'i-ma pallina estratta da Tizio è bianca"*, $i = 1, 2$, B_j = *"la j-ma pallina estratta da Caio è bianca"*, $j = 1, 2$, sia X (risp., Y) il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio (risp., Caio). Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(X = 2|X + Y = 3)$; (ii) il coefficiente di correlazione ρ della coppia $(X - Y, -X - Y)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = X-Y$, calcolare la probabilità dell'evento $(Z = h)$, per ogni $h \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, e la funzione caratteristica di Z.

   $P(Z = h) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul rettangolo $R = [0, 2] \times [0, 4]$. Indicando con σ_1, σ_2 gli scarti quadratici medi di X, Y, calcolare le probabilità $\alpha = P(1-\sigma_1 \leq X \leq 1+\sigma_1)$ e $\beta = P(2-\sigma_2 \leq Y \leq 2+\sigma_2)$; inoltre, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(X \leq 1 + \sigma_1 \,|\, Y \leq 2 + \sigma_2)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

4. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{2}{3}, P(E_1^c \vee E_2^c) = \frac{7}{12}, P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = \frac{16}{21}$, calcolare: (i) $\alpha = P(E_1 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$; (ii) $\beta = P(E_1 \,|\, E_2 E_3^c)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

5. Dato un triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (0, c), (c, 0)$, con $c > 0$, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y) \in T$ è $f(x, y) = \frac{1}{2}$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c e la probabilità condizionata $p = P(X+Y \geq \frac{1}{2} \,|\, X+Y \leq 1)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{3}{2}\, e^{-x-y}$, per $x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione di X e la funzione di rischio di Y.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

7. Da un gruppo di 12 studenti, dei quali 2 non sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 3. Successivamente, il quesito viene sottoposto a due dei 3 studenti (scelti a caso). Definiti gli eventi H_r = *"fra i 3 studenti estratti a caso ve ne sono r che non sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; A = *"i 2 studenti scelti a caso sanno risolvere il quesito"*, calcolare $\alpha = P(A)$ e la probabilità p che tutti e tre gli studenti estratti sappiano risolvere il quesito, condizionata ad A.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 4/4/2014.

1. Gli eventi A_1, A_2, B_1, B_2 sono equiprobabili e indipendenti, con $P(A_i) = P(B_j) = \frac{3}{5}$. Allora: $X = |A_1| + |A_2| \sim B(2, \frac{3}{5})$, $Y = |B_1| + |B_2| \sim B(2, \frac{3}{5})$, con X e Y stocasticamente indipendenti, e si ha: $P(X = 0) = P(Y = 0) = p_0 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, $P(X = 2) = P(Y = 2) = p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = p_1 = 1 - p_0 - p_2 = \frac{12}{25}$. Allora, posto $P(X = h, Y = k) = p_{hk}$ e osservando che $p_{hk} = P(X = h)P(Y = k) = p_h p_k$, segue:

$$p = P(X = 2|X + Y = 3) = \frac{P(X = 2, X + Y = 3)}{P(X + Y = 3)} = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(X + Y = 3)} =$$

$$= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} = \frac{p_2 p_1}{p_1 p_2 + p_2 p_1} = \frac{\frac{9}{25} \cdot \frac{12}{25}}{\frac{12}{25} \cdot \frac{9}{25} + \frac{9}{25} \cdot \frac{12}{25}} = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre, osservando che $Var(X) = Var(Y) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$, segue

$$Cov(X-Y, -X-Y) = -Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) + Cov(Y, Y) = -Var(X) + Var(Y) = 0\,;$$

pertanto: $\rho = 0$.

2. Ricordando che X e Y sono indipendenti e ugualmente distribuiti, si ha

$$P(Z = 0) = p_0 p_0 + p_1 p_1 + p_2 p_2 = \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} + \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} + \frac{9}{25} \cdot \frac{9}{25} = \frac{241}{625}\,,\ P(Z = 1) = p_1 p_0 + p_2 p_1 =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{4}{25} + \frac{9}{25} \cdot \frac{12}{25} = \frac{156}{625} = P(Z = -1)\,,\ P(Z = 2) = p_2 p_0 = \frac{36}{625} = p_0 p_2 = P(Z = -2)\,.$$

Allora, posto $P(Z = h) = a_h$, si ha:

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_{h=-2}^{2} a_h e^{ith} = \frac{36e^{-2it} + 156e^{-it} + 241 + 156e^{it} + 36e^{2it}}{625}\,.$$

3. L'area di R è pari a 8; pertanto $f(x, y) = \frac{1}{8}$, per $(x, y) \in R$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, come si può facilmente verificare, le distribuzioni marginali sono ancora uniformi; cioè: $X \sim U([0, 2])$, $Y \sim U([0, 4])$; quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti e si ha: $Var(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$, $Var(Y) = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{4}{3}$; pertanto: $\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Allora, osservando che $f_1(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [0, 2]$, $f_2(y) = \frac{1}{4}$, per $y \in [0, 4]$, con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove, segue

$$\alpha = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.5774\,;\quad \beta = \int_{2-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2+\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \alpha\,;$$

$$\gamma = \frac{P(X \leq 1 + \sigma_1,\, Y \leq 2 + \sigma_2)}{P(Y \leq 2 + \sigma_2)} = \frac{P\left(X \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) P\left(Y \leq 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{P\left(Y \leq 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} =$$

$$= P\left(X \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.7887\,.$$

4. Si ha
$$P(E_i) = P(E_1) = \frac{2}{3},\ P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12},\ P(E_1E_2E_3) = 1 - \frac{16}{21} = \frac{5}{21}\,.$$
Allora: $P(E_1 \vee E_3) = 2P(E_1) - P(E_1E_2) = 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$; inoltre
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 3P(E_1) - 3P(E_1E_2) + P(E_1E_2E_3) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{21} = \frac{83}{84}\,.$$
Pertanto
$$\alpha = P(E_1 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1 \vee E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{83}{84}} = \frac{77}{83}\,;$$
$$\beta = P(E_1 \,|\, E_2E_3^c) = \frac{P(E_1E_2E_3^c)}{P(E_2E_3^c)} = \frac{P(E_1E_2) - P(E_1E_2E_3)}{P(E_2) - P(E_2E_3)} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{5}{21}}{\frac{2}{3} - \frac{5}{12}} = \frac{5}{7}\,.$$

5. L'area di T è $\mu(T) = \frac{c^2}{2}$ ed essendo la distribuzione di (X,Y) uniforme su T dev'essere $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{2}{c^2} = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$; pertanto: $c = 2$. Inoltre, indicando con T_1 il triangolo di vertici i punti $(0,0),(0,1),(1,0)$, con $T_{\frac{1}{2}}$ il triangolo di vertici i punti $(0,0),(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0)$ e con D l'insieme differenza $T_1 \setminus T_{\frac{1}{2}}$, poichè $(X,Y) \sim U(T)$ segue
$$p = \frac{P(X+Y \geq \frac{1}{2}, X+Y \leq 1)}{P(X+Y \leq 1)} = \frac{\frac{\mu(D)}{\mu(T)}}{\frac{\mu(T_1)}{\mu(T)}} = \frac{\mu(D)}{\mu(T_1)} = \frac{\mu(T_1) - \mu(T_{\frac{1}{2}})}{\mu(T_1)} = \frac{3}{4}\,.$$

6. Si ha
$$f_1(x) = \int_0^{2x} \frac{3}{2}\, e^{-x-y} dy = \frac{3}{2}\, e^{-x} \int_0^{2x} e^{-y} dy = \frac{3}{2}\, e^{-x}(1 - e^{-2x}) = \frac{3}{2} \cdot e^{-x} - \frac{1}{2} \cdot 3e^{-3x}\,,\ x \geq 0\,;$$
pertanto, osservando che f_1 è una combinazione lineare di densità esponenziali, si ha
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} x f_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x} dx = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,.$$
Inoltre
$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{2}}^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-x-y} dx = \frac{3}{2}\, e^{-y} \int_{\frac{y}{2}}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{3}{2}\, e^{-y} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}y}\,,\ y \geq 0\,;$$
ovvero Y ha una densità esponenziale di parametro $\lambda = \frac{3}{2}$; pertanto per ogni $y \geq 0$ si ha
$$S_2(y) = \int_y^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}t} dt = e^{-\frac{3}{2}y}\,; \quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{3}{2}\,.$$

7. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{10}{3-r}}{\binom{12}{3}}$, $r = 0,1,2$; quindi
$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{10}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{6}{11}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{9}{22}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22}\,,$$
con $P(A|H_0) = 1$, $P(A|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = 0$. Allora
$$\alpha = P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{22} = \frac{15}{22}\,;$$
inoltre:
$$p = P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{6}{11}}{\frac{15}{22}} = \frac{4}{5}\,.$$