Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 14/10/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 5 nere si effettuano 6 estrazioni senza restituzione. Sia E_i l'evento "la pallina bianca esce all'i-ma estrazione", $i = 1, \ldots, 6$, ed X il numero aleatorio di estrazioni fino all'uscita della pallina bianca. Tizio vince un premio se la pallina bianca esce in una delle prime due estrazioni; Caio vince il premio se la pallina bianca esce in una delle ultime due estrazioni. Calcolare: (i) la previsione di X; (ii) la probabilità p che il premio venga vinto da Tizio oppure da Caio; (iii) la probabilità γ che il premio venga vinto da Caio, condizionata all'evento $(X \geq 3)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $p =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

2. I costituenti relativi a tre eventi A, B, C, con $A \subset B$, $BC = \emptyset$, sono ugualmente probabili. Posto $X = |A| - |B| + |C|$, calcolare la previsione e la funzione di ripartizione di X.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$

3. Due oggetti, A e B, effettuano un percorso di 1 km con velocità aleatorie (in km/h) X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è uniforme sul quadrato Q di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$. Calcolare: (i) la probabilità α che sia A che B effettuino il percorso entro un'ora; (ii) la probabilità β che A impieghi almeno un'ora, condizionata all'evento $(X + Y \leq 2)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

4. Una macchina M produce pezzi che sono difettosi con probabilità $\frac{1}{4}$. In un lotto L formato da 4 pezzi buoni si aggiunge un pezzo che può essere difettoso (ipotesi H), oppure non difettoso (ipotesi H^c). Successivamente, da L si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Posto E_i = "l'i-mo pezzo estratto è non difettoso", $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità $\alpha = P(E_1E_2E_3)$ e la probabilità $\beta = P(H|E_1E_2E_3)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

5. Siano dati due numeri aleatori X e Y, non negativi e stocasticamente indipendenti, con $S_1(x) = P(X > x) = (1 + x)e^{-x}$, per $x \geq 0$, ed $F_2(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-y}$, per $y \geq 0$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione e la funzione di rischio di Z.

   $\mathbb{P}(Z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Dati due numeri aleatori X, Y, indipendenti e ugualmente distribuiti, con funzione caratteristica $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = e^{-2t^2}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza della media aritmetica $Z = \frac{X+Y}{2}$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Var(Z) =$

7. La durata fino al guasto di un certo tipo di dispositivo prodotto da un'apparecchiatura è un numero aleatorio Θ con distribuzione iniziale normale, di parametri $m_0 = 5$, $\sigma_0 = 1$. Nelle prove di laboratorio effettuate sulla durata di 4 dispositivi simili si è osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 20$. Le componenti del campione casuale $(X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale $N_{\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Calcolare la previsione m_4 e lo scarto quadratico medio σ_4 di $\Theta|\mathbf{x}$. Inoltre, calcolare la probabilità $p = P(\Theta > \frac{14}{3} \,|\, \mathbf{x})$.

   $m_4 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_4 =$ $\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 14/10/2016.

1. Gli eventi E_i sono scambiabili e in particolare equiprobabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{6}$; inoltre l'evento $(X = i)$ coincide con l'evento E_i; pertanto: $P(X = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \ldots, 6$, da cui segue: $\mathbb{P}(X) = \frac{1+2+\cdots+6}{6} = \frac{7}{2}$. Il premio viene vinto da Tizio oppure da Caio se e solo se gli eventi E_3 ed E_4 sono entrambi falsi; pertanto
$$p = P(E_3^c E_4^c) = P[(E_3 \vee E_4)^c] = 1 - P(E_3 \vee E_4) = \frac{2}{3}\,.$$
Infine, osservando che Caio vince il premio se e solo se $(X \geq 5)$, segue
$$\gamma = P(X \geq 5 \,|\, X \geq 3) = \frac{P(X \geq 5, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(E_5 \vee E_6)}{1 - P(E_1 \vee E_2)} = \frac{1}{2}\,.$$

2. I costituenti sono
$$C_1 = ABC^c\,, \quad C_2 = A^cBC^c\,, \quad C_3 = A^cB^cC\,, \quad C_4 = A^cB^cC^c\,;$$
pertanto $P(C_h) = \frac{1}{4}$, $h = 1, 2, 3, 4$. Si ha: $X \in \{-1, 0, 1\}$, con
$$(X = -1) = C_2\,, \;\; (X = 0) = C_1 \vee C_4\,, \;\; (X = 1) = C_3\,,$$
e con
$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}\,, \;\; P(X = 0) = \frac{1}{2}\,.$$
Allora: $\mathbb{P}(X) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$. Infine, $F(x) = 0$, per $x < -1$; $F(x) = \frac{1}{4}$, per $-1 \leq x < 0$; $F(x) = \frac{3}{4}$, per $0 \leq x < 1$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$.

3. Si ha $f(x, y) = \frac{1}{4}$, per $(x, y) \in Q$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, A e B effettuano entrambi il percorso entro un'ora se e solo se $X \geq 1$ e $Y \geq 1$; pertanto
$$\alpha = P(X \geq 1, Y \geq 1) = P(X \in [1, 2], Y \in [1, 2]) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{4} dxdy = \frac{1}{4}\,.$$
Infine, osservando che A impiega almeno un'ora se e solo se $(X \leq 1)$ e che l'equazione della retta passante per i punti $(2, 0), (0, 2)$ è $y = 2 - x$, segue
$$\beta = P(X \leq 1 \,|\, X + Y \leq 2) = \frac{P(X \leq 1, X + Y \leq 2)}{P(X + Y \leq 2)} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2-x} \frac{1}{4}\, dxdy}{\int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{1}{4}\, dxdy} = \cdots = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha $P(H) = \frac{1}{4}$, $P(H^c) = \frac{3}{4}$; inoltre
$$P(E_1E_2E_3|H) = P(E_1|H)P(E_2|E_1H)P(E_3|E_1E_2H) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\,, \quad P(E_1E_2E_3|H^c) = 1\,.$$
Allora
$$\alpha = P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{20}\,.$$
Infine
$$\beta = P(H|E_1E_2E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3|H)P(H)}{P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{17}{20}} = \frac{2}{17}\,.$$

5. Si ha $f_1(x) = -S_1'(x) = \cdots = xe^{-x}$ (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 1$); pertanto: $\mathbb{P}(X) = \frac{c}{\lambda} = 2$; inoltre, $f_2(y) = F_2'(y) = e^{-y}$ (distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$); pertanto: $\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1$; allora: $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 3$. Inoltre, fissato $z \geq 0$ e indicato con T_z il triangolo di vertici i punti $(0,0),(z,0),(0,z)$, l'evento $(Z \leq z)$ coincide con l'evento $[(X,Y) \in T_z]$. Tenendo conto che l'equazione della retta passante per i punti $(z,0),(0,z)$ è $y = z - x$, si ottiene

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P[(X,Y) \in T_z] = \int\int_{T_z} f(x,y)dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} f_1(x)f_2(y)dy =$$

$$= \int_0^z xe^{-x}F_2(z-x)dx = \int_0^z xe^{-x}(1 - e^{-(z-x)})dx = \int_0^z xe^{-x}dx - e^{-z}\int_0^z xdx =$$

$$= [-xe^{-x}]_0^z + \int_0^z e^{-x}dx - \frac{z^2}{2}e^{-z} = -ze^{-z} + 1 - e^{-z} - \frac{z^2}{2}e^{-z} = 1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)e^{-z}.$$

Allora: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)e^{-z}$, $f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{z^2}{2}e^{-z}$ (distribuzione Gamma di parametri $c = 3, \lambda = 1$), da cui segue $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\frac{z^2}{2}}{1+z+\frac{z^2}{2}} = \frac{z^2}{2+2z+z^2}$.

6. Si ha

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X+Y}{2}}) = \mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X}{2}})\mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{Y}{2}}) = \varphi_X\left(\frac{t}{2}\right)\varphi_Y\left(\frac{t}{2}\right) = \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2 = e^{-t^2}.$$

Inoltre

$$\varphi_Z'(t) = -2te^{-t^2}, \quad \varphi_Z''(t) = -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2},$$

con: $\varphi_Z'(0) = 0$, $\varphi_Z''(0) = -2$. Allora

$$\mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi_Z'(0)}{i} = 0, \quad \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi_Z''(0)}{i^2} = 2;$$

pertanto: $Var(Z) = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = 2$.

7. Si ha $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = 1 + 8 = 9$, da cui segue $\sigma_4 = \frac{1}{3}$; inoltre, tenendo conto che $\overline{x} = m_0$, si ha: $m_4 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{4}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{4}{\sigma^2}} = m_0 = 5$. Infine, ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$ e che $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, si ha

$$p = P\left(\Theta > \frac{14}{3}\,|\,\mathbf{x}\right) = 1 - P\left(\Theta \leq \frac{14}{3}\,|\,\mathbf{x}\right) = 1 - \Phi_{5,\frac{1}{3}}\left(\frac{14}{3}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{14}{3} - 5}{\frac{1}{3}}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \simeq 0.8413.$$