

**Calcolo delle probabilità** (Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma - 16/9/2005)

Scrivere le risposte negli appositi spazi  
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Sia dato un triangolo di vertici  $A, B, C$ . Una formica, posizionata inizialmente in  $A$ , si sposta a caso in uno degli altri due vertici, continuando in questo modo negli spostamenti successivi. Sia  $X$  il numero aleatorio di passi fino alla prima volta in cui la formica si sposta nel vertice  $C$ . Calcolare la probabilità dell'evento  $(X > n)$  e la previsione di  $X$ .

$$P(X > n) = \qquad \qquad \qquad \mathbb{P}(X) =$$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio  $X$  è  $f(x) = \frac{1}{2}$ , per  $x \in [-\frac{3}{2}, 0]$ ,  $f(x) = \frac{-x+1}{2}$ , per  $x \in (0, 1]$ , con  $f(x) = 0$  altrove. Determinare la funzione di ripartizione di  $X$  e la probabilità  $\alpha$  dell'evento  $(X > \frac{1}{2})$ .

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \end{array} \right. \qquad \qquad \alpha =$$

3. Siano dati due lotti  $L_1$  ed  $L_2$ , contenenti ciascuno 1 componente difettoso e 4 buoni. Da ognuno dei due lotti si estraggono in blocco 2 componenti, con i quali si forma un lotto  $L_3$ . Indicando con  $X$  il numero aleatorio di pezzi difettosi contenuti in  $L_3$ , calcolare, per ogni valore possibile  $x$  di  $X$ , la probabilità  $p_x$  dell'evento  $(X = x)$ .  
(Nota: indicare con  $Y$  (risp.,  $Z$ ) il numero di pezzi difettosi estratti da  $L_1$  (risp.,  $L_2$ )).

$x$  :

$p_x$  :

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione generatrice  $\psi(t)$  (oppure la funzione caratteristica  $\phi(t)$ ) di  $X$ .

$$\psi(t) = \qquad \qquad \qquad (\phi(t) = \qquad \qquad \qquad )$$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo  $(X, Y)$  è  $f(x, y) = k(x + y)$ , per  $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$ , con  $f(x, y) = 0$  altrove. Calcolare il valore della costante  $k$  e la previsione del numero aleatorio  $XY$ .

$$k = \qquad \qquad \qquad \mathbb{P}(XY) =$$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza  $S_Z(z)$  del numero aleatorio  $Z = X + Y$ , per ogni  $z \in (0, 1)$ .

Soluzioni della prova scritta del 16/9/2005.

1. L'evento  $(X > n)$  si verifica se e solo se nei primi  $n$  passi la formica si sposta da  $A$  a  $B$  e viceversa, senza mai andare in  $C$ . Definiti gli eventi  $E_k = \text{al } k\text{-mo passo la formica si sposta in } C$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , si ha

$$P(X > n) = P(E_1^c \cdots E_n^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) \cdots P(E_n^c|E_1^c \cdots E_{n-1}^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Inoltre

$$P(X = n) = P(E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) \cdots P(E_n|E_1^c \cdots E_{n-1}^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

quindi  $X$  ha una distribuzione geometrica di parametro  $p = \frac{1}{2}$ . Pertanto:

$$P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \cdots = \frac{1}{p} = 2.$$

2. Si ha  $F(x) = 0$ , per  $x \leq -\frac{3}{2}$ ,  $F(x) = 1$ , per  $x \geq 1$ . Inoltre, per  $x \in (-\frac{3}{2}, 0]$ , si ha

$$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

Infine, per  $x \in (0, 1)$ , si ha

$$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{1}{2} dt + \int_0^x \frac{-t+1}{2} dt = \frac{3}{4} + \frac{-x^2+2x}{4} = \frac{-x^2+2x+3}{4}.$$

Allora

$$\alpha = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \cdots = 1 - \frac{-\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{1}{16}.$$

3. Si ha  $X = Y + Z$ , con  $Y$  e  $Z$  stocasticamente indipendenti e con

$$P(Y = 0) = P(Z = 0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}, \quad P(Y = 1) = P(Z = 1) = \frac{2}{5}.$$

Allora  $X \in \{0, 1, 2\}$ , con

$$P(X = 0) = p_0 = P(Y = 0)P(Z = 0) = \frac{9}{25},$$

$$P(X = 1) = p_1 = P(Y = 0)P(Z = 1) + P(Y = 1)P(Z = 0) = \frac{12}{25},$$

$$P(X = 2) = p_2 = P(Y = 1)P(Z = 1) = \frac{4}{25}.$$

4. Si ha

$$\psi(t) = \mathbb{P}(t^X) = \sum_{x=0}^2 p_x t^x = \frac{9}{25} + \frac{12}{25} t + \frac{4}{25} t^2;$$
$$\phi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{x=0}^2 p_x e^{itx} = \frac{9}{25} + \frac{12}{25} e^{it} + \frac{4}{25} e^{2it}.$$

5. Si ha

$$\int_0^2 \int_0^1 k(x+y) dx dy = \dots = 3k = 1;$$

pertanto:  $k = \frac{1}{3}$ . Inoltre

$$\mathbb{P}(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy \cdot \frac{1}{3}(x+y) dx dy = \dots = \frac{2}{3}.$$

6. Si ha  $Z \in [0, 3]$ . Inoltre, per  $z \in (0, 1)$  si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = 1 - F_Z(z) = 1 - \int_0^z \int_0^{z-x} \frac{1}{3}(x+y) dx dy = \dots =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} \int_0^z [x(z-x) + \frac{1}{2}(z-x)^2] dx = \dots = 1 - \frac{z^3}{9}.$$