*Nome e Cognome :* ______________________ *Num. Matr. :* ____________

**Probabilità e Statistica I** (13/6/2009)

*(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)*

1. Da un'urna, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 1 nera, si effettuano estrazioni con restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna una pallina di colore opposto a quello della pallina estratta. Definiti gli eventi $E_i$ = *l'i-ma pallina estratta è bianca*, $i = 1, 2, \ldots$, calcolare la probabilità $\alpha$ dell'evento condizionato $E_1|E_3$.

   $\alpha =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-3)^2+(y-1)^2}{2}}$, per ogni $(x, y)$. Calcolare la varianza del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $Var(Z) =$

3. Dato un cerchio di raggio $r$ e centro nell'origine degli assi, si indichi con $D$ la parte contenuta nel primo quadrante. Un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme su $D$. Calcolare le probabilità $\alpha = P(X + Y \leq r)$, $\beta = P[(Y \leq X)|(X + Y \leq r)]$.

   $\alpha =$ $\beta =$

4. Da un'urna contenente $N$ palline, delle quali $pN$ bianche e $qN$ nere, si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Sia $E_i$ = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$; $X = |E_1| + |E_2|$, $Y = |E_1| + |E_2| + |E_3|$. Calcolare il coefficiente di correlazione di $X, Y$.

   $\rho =$

**Probabilità e Statistica I** (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

*Soluzioni della prova scritta del 13/6/2009.*

1. Si ha

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{5}{24}\,;$$

$$P(E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \cdots =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $\alpha = P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1E_3)}{P(E_3)} = \frac{5}{12}$.

2. Osservando che $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} = N_{3,1}(x)N_{1,1}(y)$, si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = N_{3,1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{1,1}(y)dy = N_{3,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}\,,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = N_{1,1}(y)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{3,1}(x)dx = N_{1,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,;$$

ovvero, $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti e quindi $Cov(X,Y) = 0$. Inoltre, $Var(X) = Var(Y) = 1$; pertanto

$$Var(Z) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 2\,.$$

3. L'area di $D$ è $\frac{\pi r^2}{4}$; pertanto $f(x,y) = \frac{1}{\mu(D)} = \frac{4}{\pi r^2}$, per $(x,y)\in D$, con $f(x,y)=0$ altrove. Inoltre, si ha $(X+Y\le r) = [(X,Y)\in T]$, dove $T$ è il triangolo di vertici $(0,0),(r,0),(0,r)$; pertanto

$$\alpha = \int\int_T f(x,y)dxdy = \frac{1}{\mu(D)}\int\int_T dxdy = \frac{\mu(T)}{\mu(D)} = \frac{\frac{r^2}{2}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Infine, osservando che $(Y\le X)\wedge(X+Y\le r) = [(X,Y)\in\Gamma]$, dove $\Gamma$ è il triangolo di vertici $(0,0),(r,0),(\frac{r}{2},\frac{r}{2})$, si ha

$$\beta = \frac{P[(Y\le X)\wedge(X+Y\le r)]}{P(X+Y\le r)} = \frac{\int\int_\Gamma f(x,y)dxdy}{\int\int_T f(x,y)dxdy} = \frac{\int\int_\Gamma dxdy}{\int\int_T dxdy} = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(T)} = \frac{\frac{r^2}{4}}{\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

4. Osservando che $X\sim B(2,p)$, $Y\sim B(3,p)$ e che $Cov(|E_i|,|E_j|)=0$ per $i\neq j$, segue

$$Cov(X,Y) = Cov(X, X+|E_3|) = Cov(X,X) + Cov(X,|E_3|) =$$
$$= Var(X) + Cov(|E_1|,|E_3|) + Cov(|E_2|,|E_3|) = Var(X) = 2pq\,;$$

inoltre $Var(Y) = 3pq$. Pertanto: $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{2pq}{\sqrt{6}pq} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.