

Probabilità e Statistica I (11/9/2009)*(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)*

1. Siano date due urne A e B , contenenti ciascuna $r + 3$ palline. L'urna A contiene r palline bianche e 3 nere; l'urna B contiene 3 palline bianche ed r nere. Scelta a caso una delle due urne, da essa si estrae una pallina. Definito l'evento $H =$ "la pallina viene estratta da A " e supposto di aver osservato l'evento $E =$ "la pallina estratta è bianca", calcolare (condizionatamente ad E) per quali valori di r l'ipotesi H risulta meno probabile dell'ipotesi H^c .

$$r =$$

2. Sia D il parallelogramma di vertici i punti $(2, 0), (2, 2), (0, 4), (0, 2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{3}{20}xy$, per $(x, y) \in D$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento $(Y \leq 2)$; (ii) la previsione di X .

$$p =$$

$$\mathbb{P}(X) =$$

3. Dato un numero aleatorio X con distribuzione normale standard, sia $Y = 3X + 2$. Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(Y \leq 2) \mid (-1 \leq Y \leq 8)$; (ii) la covarianza di X, Y .

$$p =$$

$$Cov(X, Y) =$$

4. Da una scatola contenente 5 componenti, 2 difettosi e 3 buoni, si prelevano a caso 3 pezzi che servono per il funzionamento di un sistema. Il sistema utilizza in parallelo 2 di tali componenti, mentre il terzo è disposto in serie con gli altri due. Potendo utilizzare i 3 componenti in tutti i modi possibili, calcolare: (i) la probabilità α che il sistema possa funzionare; (ii) la probabilità β che il sistema possa funzionare, supposto che almeno uno dei 3 componenti sia guasto.

(Nota: si indichi con X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i 3 prelevati dalla scatola)

$$\alpha =$$

$$\beta =$$

Soluzioni della prova scritta del 11/9/2009.

1. Si ha: $P(E|H) = \frac{r}{r+3}$, $P(E|H^c) = \frac{3}{r+3}$, $P(E) = \frac{r}{r+3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{r+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; pertanto

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{r}{r+3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{r}{r+3}; \quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = \frac{3}{r+3}.$$

Allora: $P(H|E) < P(H^c|E) \iff \frac{r}{r+3} < \frac{3}{r+3} \iff r = 0, 1, 2.$

2. La retta passante per i punti $(0, 2)$, $(2, 0)$ ha equazione $y = 2 - x$, mentre la retta passante per i punti $(0, 4)$, $(2, 2)$ ha equazione $y = 4 - x$. Allora

$$p = P(Y \leq 2) = \int_0^2 dx \int_{2-x}^2 \frac{3}{20} xy dy = \frac{3}{40} \int_0^2 (-x^3 + 4x^2) dx = \dots = \frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$f_1(x) = \int_{2-x}^{4-x} \frac{3}{20} xy dy = \dots = \frac{3}{10} (3x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_1(x) dx = \frac{3}{10} \int_0^2 (3x^2 - x^3) dx = \dots = \frac{3}{10} \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \dots = \frac{6}{5}.$$

3. Essendo $Y = 3X + 2$, l'evento condizionato $(Y \leq 2) | (-1 \leq Y \leq 8)$ coincide con l'evento condizionato $(X \leq 0) | (-1 \leq X \leq 2)$. Pertanto

$$\begin{aligned} p &= P[(Y \leq 2) | (-1 \leq Y \leq 8)] = P[(X \leq 0) | (-1 \leq X \leq 2)] = \frac{P(-1 \leq X \leq 0)}{P(-1 \leq X \leq 2)} = \\ &= \frac{\Phi(0) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-1)} = \frac{\Phi(0) + \Phi(1) - 1}{\Phi(2) + \Phi(1) - 1} \simeq \frac{0.5 + 0.8413 - 1}{0.9772 + 0.8413 - 1} = \frac{0.3413}{0.8185} \simeq 0.417. \end{aligned}$$

Inoltre: $Cov(X, Y) = Cov(X, 3X + 2) = 3Cov(X, X) = 3Var(X) = 3.$

4. Si ha $X \sim H(5, 3, \frac{2}{5})$; allora

$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{5}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Il sistema può funzionare se e solo se si verifica l'evento $(X \leq 1)$; pertanto

$$\alpha = P(X \leq 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{2} \binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Inoltre, osservando che: $P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$, $P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$, segue

$$\beta = P(X \leq 1 | X \geq 1) = \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}.$$