Probabilità e Statistica (10/04/2010)

(Ing. Civile - Trasporti, Roma; esame da 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un operatore preleva a caso 4 componenti da un lotto L contenente 5 pezzi buoni e 1 difettoso. L'operatore utilizza in periodi successivi tali componenti, scegliendo ogni volta a caso un componente e rimettendolo insieme agli altri tre al termine dell'operazione. Definiti gli eventi H = *"il componente difettoso è presente fra i 4 componenti prelevati da L"*, E_i = *"l'i-mo pezzo scelto a caso dall'operatore è buono"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare $\gamma = P(H|E_1E_2)$ e $p = P(E_3|E_1E_2)$.

   $\gamma =$ $\qquad\qquad$ $p =$

2. Un oggetto si trova in una regione rappresentata dal parallelogramma D di vertici $(0, 0)$, $(2, 1), (2, 3), (0, 2)$. Assumendo una distribuzione uniforme per la posizione aleatoria (X, Y) dell'oggetto, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X > 1)|(1 \leq Y \leq 2)$.

   $\alpha =$

3. A partire da una data posizione iniziale, su una retta si effettuano due spostamenti aleatori X e Y, con densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{6\pi}e^{-\frac{(x-10)^2}{18}-\frac{(y-4)^2}{2}}$, con $(x, y) \in I\!R^2$. Calcolare la previsione m_Z e lo scarto standard σ_Z della posizione aleatoria finale $Z = X + Y$.

   $m_Z =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$

4. Da un'urna U, contenente 1 pallina bianca e 3 nere, si prelevano a caso 2 palline che vengono inserite in un'urna V, contenente inizialmente 1 pallina bianca; successivamente, da V si estraggono in blocco 2 palline. Sia X il numero aleatorio di palline nere estratte da U e inserite in V; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline nere estratte da V. Calcolare la covarianza di X, Y. (*nota: si ponga* $p_{xy} = P(X = x, Y = y)$).

   $Cov(X, Y) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

6. Un sistema S è composto da 2 dispositivi in parallelo funzionanti simultaneamente, con tempi di funzionamento aleatorio X e Y, rispettivamente. Assumendo X, Y indipendenti e con distribuzione esponenziale, con $\lambda_X = 2$, $\lambda_Y = 1$, calcolare, per ogni $z \geq 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del tempo di funzionamento aleatorio Z di S.

   $h_Z(z) =$

7. Un'apparecchiatura $\mathcal{A}$ funziona utilizzando n dispositivi simili, i cui tempi di durata fino al guasto sono dei numeri aleatori $X_1, \ldots, X_n$, ugualmente distribuiti e indipendenti, subordinatamente a ciascun valore θ di un parametro aleatorio Θ. La distribuzione iniziale di Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Assumendo che, per ogni fissato θ, la densità di $X_i|\theta$ sia $f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, per $x_i \geq 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove, calcolare la densità finale di Θ, supposto di aver osservato, per i tempi di durata, un vettore $(x_1, \cdots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = \tau$.

   $\beta(\theta|x_1, \cdots, x_n) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 10/04/2010.

1. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{3}\,,\; P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|H) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}\,,\; P(E_1E_2|H^c) = 1\,;$$

$$\gamma = \frac{P(H)P(E_1E_2|H)}{P(H)P(E_1E_2|H) + P(H^c)P(E_1E_2|H^c)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{9}{24}}{\frac{17}{24}} = \frac{9}{17}\,;$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(H)P(E_1E_2E_3|H) + P(H^c)P(E_1E_2E_3|H^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{64} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{59}{96}\,;$$

$$p = P(E_3|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{\frac{59}{96}}{\frac{17}{24}} = \frac{59}{68}\,.$$

2. L'area del parallelogramma (in un'opportuna unità di misura) è pari a 4, pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in D$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, osserviamo che: (i) risulta $1 \leq Y \leq 2$ se e solo se (X,Y) appartiene al rettangolo R di vertici $(0,1),(2,1),(2,2),(0,2)$, di area $\mu(R) = 2$; (ii) risulta $(X > 1, 1 \leq Y \leq 2)$ se e solo se (X,Y) appartiene al quadrato Q di vertici $(1,1),(2,1),(2,2),(1,2)$, di area $\mu(Q) = 1$. Allora

$$\alpha = P[(X>1)|(1 \leq Y \leq 2)] = \frac{P(X>1, 1 \leq Y \leq 2)}{P(1 \leq Y \leq 2)}\,,$$

con

$$P(X>1, 1\leq Y \leq 2) = \int\int_Q f(x,y)dxdy = \frac{\mu(Q)}{\mu(D)} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(1 \leq Y \leq 2) = \int\int_R f(x,y)dxdy = \frac{\mu(R)}{\mu(D)} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $\alpha = \frac{\mu(Q)}{\mu(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

3. Osservando che

$$\frac{1}{6\pi}e^{-\frac{(x-10)^2}{18}-\frac{(y-4)^2}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-10)^2}{18}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-4)^2}{2}} = N_{10,3}(x)N_{4,1}(y)\,,$$

si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = N_{10,3}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{4,1}(y)dy = N_{10,3}(x)\,,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = N_{4,1}(y)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{10,3}(x)dx = N_{4,1}(y)\,;$$

pertanto

$$m_X = 10\,,\ \sigma_X = 3\,,\ \ m_Y = 4\,,\ \sigma_Y = 1\,,\ \ f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ Cov(X,Y) = 0\,,$$

da cui segue: $m_Z = m_X + m_Y = 14\,;\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{10}$.

4. Si ha

$$X \in \{1,2\}\,,\ Y \in \{0,1,2\}\,,\ (X,Y) \in \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2)\}\,,\ XY \in \{0,1,2,4\}\,,$$

con $P(X=1)=\frac{1}{2}\,,\ P(X=2)=\frac{1}{2}$, e con

$$P(Y=0|X=1)=\frac{1}{3}\,,\ P(Y=1|X=1)=\frac{2}{3}\,,\ P(Y=1|X=2)=\frac{2}{3}\,,\ P(Y=2|X=2)=\frac{1}{3}\,;$$

$$p_{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,,\quad p_{11}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\,,\quad p_{21}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\,,\quad p_{22}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,;$$

$$P(Y=0)=p_{10}=\frac{1}{6}\,,\ P(Y=1)=p_{11}+p_{21}=\frac{2}{3}\,,\ P(Y=2)=p_{22}=\frac{1}{6}\,;$$

$$P(XY=0)=p_{10}=\frac{1}{6}\,,\ P(XY=1)=p_{11}=\frac{1}{3}\,,\ P(XY=2)=p_{21}=\frac{1}{3}\,,\ P(XY=4)=p_{22}=\frac{1}{6}\,;$$

pertanto

$$I\!P(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,,\ I\!P(Y)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=1\,,\ I\!P(XY)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}\,;$$

quindi: $Cov(X,Y)=I\!P(XY)-I\!P(X)I\!P(Y)=\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$.

5. Si ha $Z \in \{1,2,3,4\}$, con

$$P(Z=1)=p_{10}=\frac{1}{6}\,,\ P(Z=2)=p_{11}=\frac{1}{3}\,,\ P(Z=3)=p_{21}=\frac{1}{3}\,,\ P(Z=4)=p_{22}=\frac{1}{6}\,;$$

pertanto, posto $P(Z=h)=p_h$, si ha:

$$\varphi_Z(t)=\mathbb{P}(e^{itZ})=\sum_1^4 p_h e^{ith}=\frac{e^{it}+2e^{2it}+2e^{3it}+e^{4it}}{6}\,.$$

6. Si ha $Z=\max\{X,Y\}\,,\quad h_Z(z)=\frac{f_Z(z)}{S_Z(z)}$, con

$$S_Z(z)=P(Z>z)=1-P(Z\le z)=1-P(X\le z,Y\le z)=1-P(X\le z)P(Y\le z)=$$

$$=1-(1-e^{-2z})(1-e^{-z})=e^{-z}+e^{-2z}-e^{-3z}\,,\quad f_Z(z)=-S'_Z(z)=e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z}\,,\ z\ge 0\,;$$

pertanto

$$h_Z(z)=\frac{e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z}}{e^{-z}+e^{-2z}-e^{-3z}}=\frac{e^{2z}+2e^{z}-3}{e^{2z}+e^{z}-1}\,,\ z\ge 0\,.$$

7. Si ha

$$\beta(\theta|x_1,\cdots,x_n)=k(x_1,\cdots,x_n)\beta(\theta)\alpha(x_1,\cdots,x_n\,|\,\theta)\,,$$

con

$$\alpha(x_1,\cdots,x_n\,|\,\theta)=f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)=\theta e^{-\theta x_1}\cdots\theta e^{-\theta x_n}=\theta^n e^{-\theta\tau}\,;$$

pertanto

$$\beta(\theta|x_1,\cdots,x_n)=k(x_1,\cdots,x_n)\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}\theta^n e^{-\theta\tau}=k_1(x_1,\cdots,x_n)\theta^{n+2}e^{-(\tau+1)\theta}=G_{c,\lambda}(\theta)\,,$$

con

$$c=n+3\,,\quad \lambda=\tau+1\,,\quad k_1(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\lambda^c}{\Gamma(c)}=\frac{(\tau+1)^{n+3}}{(n+2)!}\,.$$